ИННОВАЦИОННЫЙ ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

INNOVATIVE DEVELOPMENT CENTER OF EDUCATION AND SCIENCE

О вопросах и проблемах современных математических и естественных наук

Выпуск VII

Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции (11 июля 2020 г.)

г. Челябинск

2020 г.

Издатель Инновационный центр развития образования и науки (ИЦРОН), г. Нижний Новгород

УДК 50(06)
ББК 2я43

О вопросах и проблемах современных математических и естественных наук./ Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции. № 7. **г. Челябинск**, 2020 г. 47 с.

В сборнике научных трудов по итогам VII Международной научно-практической конференции **«О вопросах и проблемах современных математических и естественных наук» г. Челябинск** представлены научные статьи, тезисы, сообщения аспирантов, соискателей ученых степеней, научных сотрудников, докторантов, преподавателей ВУЗов, студентов, практикующих специалистов в области естественных и математических наук Российской Федерации, а также коллег из стран ближнего и дальнего зарубежья.

Оглавление

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.00.00)

МАТЕМАТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.00)

СЕКЦИЯ №1.
ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.01)

СЕКЦИЯ №2.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.02)

СЕКЦИЯ №3.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.03)

СЕКЦИЯ №4.
ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.04)

СЕКЦИЯ №5.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.05)

ГИБРИДНЫЙ МЕТОД КЛАСТЕРИЗАЦИИ БОЛЬШИХ ДАННЫХ

Аль-Раммахи А.А.Х., Сари Ф.А., Минин Ю.В.

ФГБОУ ВО «ТГТУ», РФ, г. Тамбов

Интеллектуальный анализ данных в настоящее время является одним из наиболее востребованных методов, используемых для анализа данных и извлечения скрытой информации, при невозможности использовать традиционные подходы, что связано со сложностью анализируемых данных и их объемом [1,2]. Основной метод анализа данных, известный как кластеризация данных, группирует данные в кластеры и позволяет легко извлекать информацию из этих кластеров [2].

Кластерный анализ - это задача интеллектуального анализа данных, целью которого является поиск, рекомендации и организация данных. В методах кластеризации наборы данных группируются в несколько кластеров. Кластеризация относится к классу неконтролируемых методов обучения, что отличает ее от классификации, в которой сходные объекты набора данных группируются в определенное количество кластеров. Чаще всего используются следующие два алгоритма кластеризации - это нечеткая кластеризация С-средних и иерархическая кластеризация. Рассмотрим каждый метод чуть подробнее.

Метод нечётких с-средних позволяет разбить имеющееся множество элементов на заданное число нечётких множеств. Метод нечеткой кластеризации с-средних можно рассматривать как усовершенствованный метод k-средних, при котором для каждого элемента из рассматриваемого множества рассчитывается степень его принадлежности каждому из кластеров [3].

Алгоритм данного метода состоит из следующих шагов:

1. Задать случайным образом c центров кластеров $c_j, j=1..c$.
2. Рассчитать матрицу принадлежности элементов к кластерам r.

В случае нормального распределения:

$$r_i = \frac{\mathcal{N}(d(x_i, c_j)|\mu = 0, \sigma)}{\sum_j^k \mathcal{N}(d(x_i, c_j)|\mu = 0, \sigma)}$$

где x_i- i-й элемент; c_j - центр кластера *j; $d(x_i,c_j)$* - расстояние между точками x_i и c_j ; $\mathcal{N}$ — плотность вероятности нормального распределения в точке $d(x_i,c_j)$.

3. Переместить центры кластеров

$$c_j \leftarrow \frac{\sum_i r_{ij} x_i}{\sum_i r_{ij}}.$$

4. Рассчитать функцию потерь (например, исходя из принципа максимального правдоподобия). В случае нормального распределения функция потерь будет равна:

$$J = \sum_j^k \sum_i^N d(x_i, c_j)^2 r_{ij}$$

5. Если значение функции потерь уменьшается, то повторить цикл с п.2.

Метод нечетких *c*-средних имеет ограниченное применение из-за существенного недостатка — невозможность корректного разбиения на кластеры, в случае когда кластеры имеют различную дисперсию по различным размерностям (осям) элементов, например, когда кластер имеет форму эллипса (рис.1).

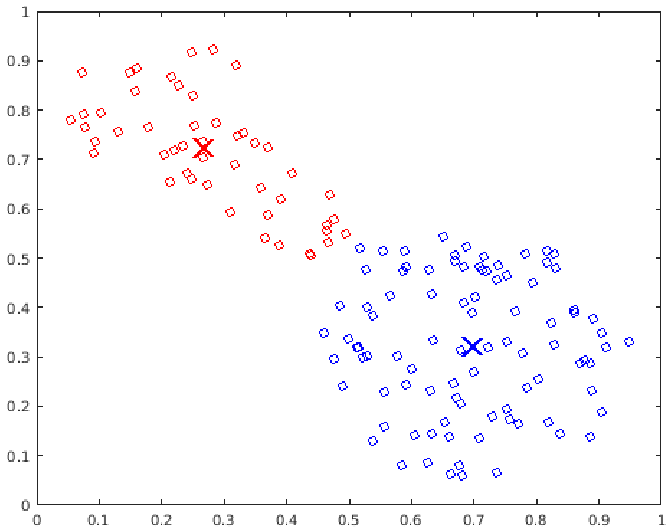


Рис. 1 – Пример данных, при которых наблюдается некорректная работа метода нечётких c-средних

Иерархическая кластеризация - это подход, в котором один кластер вложен в другой, образуя тем самым последовательность или иерархия. Иерархическая кластеризация включает в себя два класса методов (рис.2).

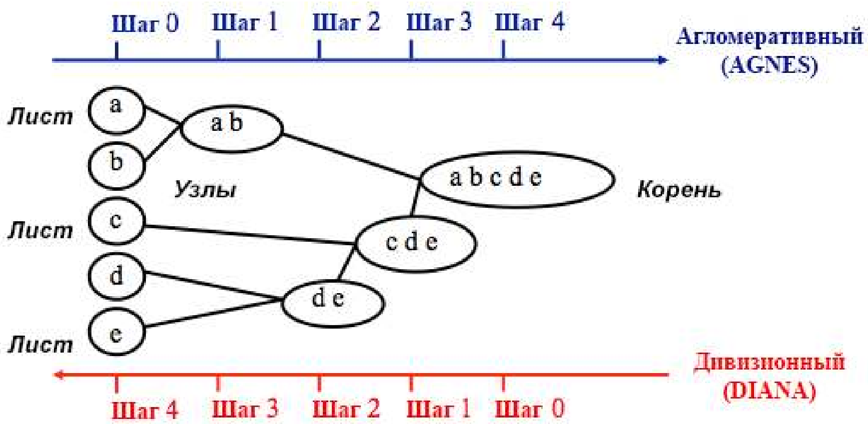


Рис. 2 – Классы методов иерархической кластеризации [4]

Агломерационная кластеризация выполняется снизу вверх. Каждая точка данных обрабатывается как один объект, а затем объединяется с другими объектами, образуя кластер. Затем эти кластеры последовательно объединяются, пока не будет получен один большой кластер. Агломерационный алгоритм имеет временную сложность $O(n^2)$. Если кластеры имеют одинаковый объем, наилучшим вариантом является метод полной связи.

Разделительная кластеризация сначала помещает все объекты в один кластер, а затем выполняется последовательное разбиение на отдельные кластеры. Эти итерации выполняются до тех пор, пока не будет получено нужное количество кластеров.

Иерархическая кластеризация имеет следующие ограничения:

- невозможно представить отдельные кластеры с такие же шаблоны выражения;
- по мере того, как кластеры растут в размере, фактическое выражение модели становятся менее актуальным;
- сложность квадратична;
- занимает больше времени, чем нечеткая кластеризация c-среднее.

Предлагается новый подход к кластеризации, который объединяет работу представленных ранее алгоритмов. Он, сочетая в себе функциональность двух вышеупомянутых методов, устраняет их недостатки, что приводит к лучшим результатам работы.

Шаги алгоритма гибридного подхода представлены ниже.

1. Загрузить набор данных.
2. Применить нечеткую кластеризацию c-средних и найти кластеры на основе данных нечетких членов.
3. Отфильтровать данные.
4. Полученные кластеры не являются адекватными, и многие точки данных все еще не принадлежат ни одному из кластеров, и качество кластеров также низкое. Поэтому проверить сформировано ли необходимое количество кластеров, и все ли точки данных были покрыты.
5. Если результатом п.4 является ответ «нет», то применить иерархический алгоритм кластеризации. Пропускаем данные, которые находятся в сформированных с помощью нечеткого алгоритма c-средних кластерах. Иерархический алгоритм создаст новые кластеры в соответствии со своим алгоритмом.
6. Сохранить все точки на карте хешей для удаления избыточности в сформированных кластерах. Извлечь точки данных обоих алгоритмов и организовать объединение кластеров, полученных с помощью обоих алгоритмов.

Предложенный подход гибридной кластеризации реализован с использованием технологии MapReduce и программного обеспечения Apache Hadoop. Произведено сравнение алгоритмов кластеризации, для чего были использованы данных о погоде NCDC [5]. Полученный результат позволяет говорить о недостатках и достоинствах применяемых методов. Метод нечеткого c-среднего генерирует только несколько кластеров, а также требует предварительного определения количества кластеров, которые должны быть сформированы. Иерархическая кластеризация является динамической по своей природе и генерирует больше кластеров, чем алгоритм нечетких c-средних, но выполняет много итераций из-за необходимости принятия многих решений о слиянии и разделении. В результате гибридного подхода мы находим максимальное количество кластеров для входных данных, и сформированные кластеры имеют очень хорошее качество, что дает наиболее точные результаты. Предложенный гибридный подход обеспечивает эффективный способ кластеризации, показывающий более высокую точность.

Список литературы

1. Воронцов К.В. Алгоритмы кластеризации и многомерного шкалирования. Курс лекций. МГУ, 2007. [URL: http://www.ccas.ru/voron/download/Clustering.pdf]

2. Загоруйко Н. Г. Прикладные методы анализа данных и знаний. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999.

3. Тараскина А.С. Нечеткая кластеризация по модифицированному методу c-средних и ее применение для обработки микрочиповых данных // проблемы интеллектуализации и качества

систем информатики. – С. 217-228. [URL: https://www.iis.nsk.su/files/articles/sbor_kas_13_taraskina.pdf]
4. Hierarchical Cluster Analysis [URL: http://uc-r.github.io/hc_clustering]
5. National Climatic Data Center [URL : ftp://ftp.ncdc.noaa.gov/pub/data/ghcn/daily/ ghcnd-all.tar.gz]

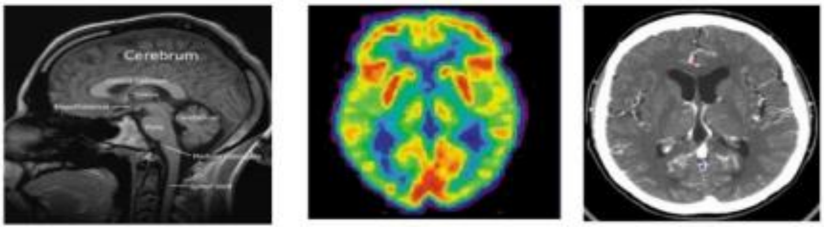
МЕТОД КЛАСТЕРИЗАЦИИ ЦИФРОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ С ШУМОМ НА ОСНОВЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ АЛГОРИТМА НЕЧЕТКИХ С-СРЕДНИХ И ПИЛЛАР-АЛГОРИТМА

Сари Ф.А., Аль-Раммахи А. А. Х., Минин Ю.В.

ФГБОУ ВО «ТГТУ», РФ, г. Тамбов

Сегментация изображений играет важную роль в обработке изображений, полученных с помощью МРТ, КТ и иных видов сканирования (рис.1). Данный процесс выполняется перед этапами анализа и принятия решений в медицинских информационных системах.

Существует несколько подходов к построению классификации методов сегментации изображений [1]: подход Фу, подход Пала, подход Скарбека и Кошана, подход Лючиса и Митра, также вопросы классификации рассматриваются в работах [2-4].



(а) **(б)** **(в)**

Рис. 1. Медицинские изображения с использованием:
(а) МРТ-сканирования, (б) ПЭТ-сканирования, (в) КТ-сканирования

Согласно работе [5] к методам, основанным на анализе свойств на пространстве признаков, относятся метод нечеткой кластеризации и метод k-средних, которые наиболее часто используются на практике. Однако следует отметить, что данные методы подвержены влиянию неоднородностей и интенсивности шума на изображении. Поэтому предлагается новый метод, который объединяет метод нечетких с-средних, который зависит от пространственных ограничений, и пиллар-алгоритм без какой-либо повторной инициализации.

В предложенном методе основная работа разделена на несколько этапов. На рис. 2 представлены четыре области соседства и движущееся двумерное окно, которые используются в методе.

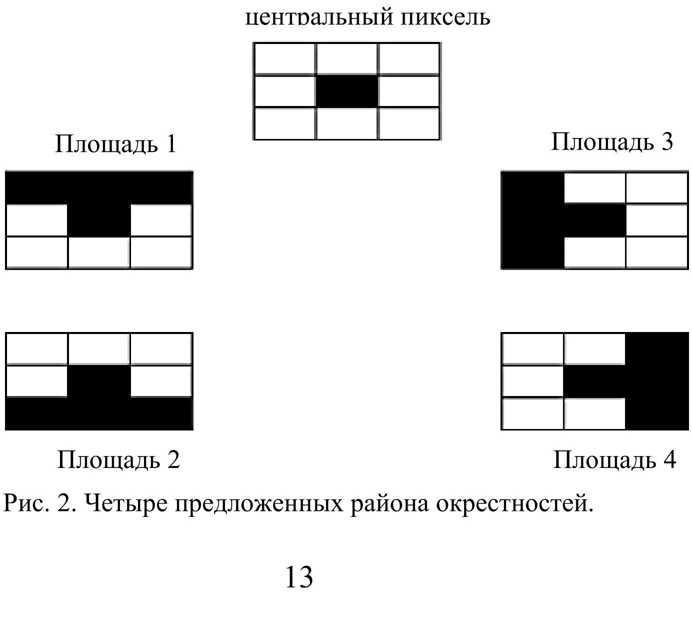


Рис. 2. Четыре предложенных района окрестностей.

Мы используем модифицированный метод нечетких c-средних, который обозначим как FCM_S. Модифицированная целевая функция определяется как:

$$J_{FCM_S} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{C} U_{jk}^{m} \|y_i - v_k\|^2 + S \tag{1}$$

где S принимает значение S1 (среднее значение соседних пикселей) или S2 (среднее значение соседнего пикселя) в качестве первого и второго варианта FCM:

$$S1 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{C} U_{jk}^{m} \|\bar{y}_i - v_k\|^2 \tag{2}$$

$$S2 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{C} U_{jk}^{m} \|\tilde{y}_i - v_k\|^2 \tag{3}$$

Функция членства определяется как

$$\mathrm{U}_{jk} = \frac{\left(\|y_i - v_k\|^2 + \alpha\|\bar{y}_i - v_k\|^2\right)^{\frac{-1}{m-1}}}{\sum_{k=1}^{c}\left(\|y_i - v_k\|^2 + \alpha\|\bar{y}_i - v_k\|^2\right)^{\frac{-1}{m-1}}} \tag{4}$$

А центры кластеров рассчитываются следующим образом

$$v_k = \frac{\sum_{j=1}^{N} \mathrm{U}_{jk}^{m} \left\|y_j - \alpha\bar{y}_j\right\|^2}{(1+\alpha)\sum_{j=1}^{N} \mathrm{U}_{jk}^{m}} \tag{5}$$

где количество кластеров k было определено автоматически; центры начальных кластеров были сгенерированы с помощью пиллар-алгоритма; α - управляющий эффект соседей (при α = 0 получаем SFCM). Для использования соседних свойств пикселей мы выбираем двумерное окно с маской 3x3, где дисперсии четырех соседних областей вычисляются с использованием некоторого предложенного выбора, как показано на рисунке 2. На следующем шаге мы добавляем еще одну 2D-маску размерностью 2x2, после чего центральный пиксель заменяется средним $\bar{y}$ или медианой $\tilde{y}$ значений выделенной области, которая имеет очень низкое значение дисперсии.

Идея предложенного подхода состоит в том, чтобы объединить два варианта одновременно, тогда уравнение (1) будет иметь вид:

$$J_{IFCM_S} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{C} U_{jk}^{m} \|y_i - v_k\|^2 + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{C} U_{jk}^{m} \|\bar{y}_i - v_k\|^2 + \\ + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{C} U_{jk}^{m} \|\tilde{y}_i - v_k\|^2 \tag{6}$$

Функция принадлежности определяется как

$$\mathrm{U}_{jk} = \frac{\left(\|y_i - v_k\|^2 + \alpha\|\bar{y}_i - v_k\|^2 + \|\tilde{y}_i - v_k\|^2\right)^{\frac{-1}{m-1}}}{\sum_{k=1}^{c}\left(\|y_i - v_k\|^2 + \alpha\|\bar{y}_i - v_k\|^2 + \|\tilde{y}_i - v_k\|^2\right)^{\frac{-1}{m-1}}} \tag{7}$$

а центры кластеров будут заданы уравнением

$$v_k = \frac{\sum_{j=1}^{N} \mathrm{U}_{jk}^{m} \left\|y_j + \bar{y}_j + \tilde{y}_j\right\|^2}{3\sum_{j=1}^{N} \mathrm{U}_{jk}^{m}} \tag{8}$$

Были проведены вычислительные эксперименты с использованием Simulink Matlab и изображениях МРТ головного мозга, полученных из базы Brainweb [6]. Эта база данных была выбрана, поскольку она очень часто используется в литературе и, следовательно, позволяет упростить сравнение с предлагаемыми проверками в других документах. Brainweb используется для имитации изображений мозга в градациях серого с различным уровнем повышенного шума и неоднородностей. Полученные результаты позволяют говорить о повышении качества результатов сегментации изображений.

Список литературы

1. Поршнев С.В., Левашкина А.О. Универсальная классификация алгоритмов сегментации изображений // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. - 2008 [URL: http://www.jurnal.org/articles/2008/inf23.html]

2. Панченко Д.С., Путятин Е.П. Сравнительный анализ методов сегментации изображений // Радиоэлектроника и информатика. 1999. №4 (9). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitelnyy-analiz-metodov-segmentatsii-izobrazheniy.
3. Романов, С. А. Анализ методов сегментации изображений / С. А. Романов, О. М. Лепешкин, Ю. П. Стоянов. // Молодой ученый. — 2010. — № 6 (17). — С. 26-28. — URL: https://moluch.ru/archive/17/1534/.
4. Ханыков И.Г. Классификация алгоритмов сегментации изображений // Приборостроение. 2018. №11. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/klassifikatsiya-algoritmov-segmentatsii-izobrazheniy (дата обращения: 24.06.2020).
5.Skarbek W., Koschan A. Color Image Segmentation – A Survey, Technisher Bericht, Technical University of Berlin, 1994. – P.94-32.
6. *BrainWeb:* Simulated Brain Database [URL: https://brainweb.bic.mni.mcgill.ca/brainweb/]

СЕКЦИЯ №6.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.06)

О ВОЗМОЖНОМ СТРОЕНИИ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ (32, 6, 0, 2)

Кравцова А.В., Носов В.В., Чибилев А.А.

ФГБОУ ВО Оренбургский государственный университет, г. Оренбург

Введение

В данной работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b – вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ – подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a* и обозначается через $[a]$. Через $a^{\perp}$ – обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Γ называется *регулярным графом степени k*, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если ребро Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Граф Γ называется *сильным с параметрами* (λ, μ), если каждое ребро из Γ лежит точно в λ треугольниках и подграф $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначим через λ(a, b)(через μ(a, b)), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем *λ-(μ-)подграфом*. *Ректаграфом* называется вполне регулярный граф с $\lambda = 0$, $\mu = 2$. Если Δ – подграф графа Γ и a, $b \in \Delta$, то через $d_\Delta(a, b)$ обозначим расстояние между a и b. Связный граф называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1,\ldots, b_{d-1}; c_1, c_2,\ldots, c_d\}$, если существуют неотрицательные целые числа b_i, $c_i (i \geq 0)$, такие что для любых двух точек x, $y \in \Gamma$, находящихся на расстоянии $i = d(x,y)$ существует точно c_i вершин, смежных с вершиной y в $\Gamma_{i-1}(x)$ и b_i вершин, смежных с вершиной y в $\Gamma_{i-1}(x)$. *Блок-схемой* с параметрами (v, b, r, k, λ) называют упорядоченную пару $(X, \mathcal{B})$, где X – конечное множество, содержащее v точек. $\mathcal{B} \subseteq 2^X$, причём $|\mathcal{B}| = b$: $B_1, B_2, \ldots B_b$, таких что, $|B_i| = k$ для любого $i \in \{1,\ldots,b\}$ (т.е. каждый блок инцидентен ровно k точкам), каждая точка инцидентна ровно r блокам и любые две точки лежат точно в λ блоках.

В работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (352, 26, 0, 2), G = Aut(Γ), *g– элемент простого порядка p из G и* Δ = Fix(g). *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) p = 2 *и либо* Δ *– пустой граф,* 14*-коклика или связный граф степени* 6 *на* 32 *вершинах, либо* Δ *имеет* 4 *связные компоненты, являющиеся четырехугольниками;*

(2) р = 5 и Δ − *двухвершинная клика;*

(3) р = 13 и Δ *является одновершинным графом*.

В этом утверждении строение всех графов очевидно, за исключением связного графа, степени 6 на 32 вершинах. Именно строению этого графа посвящена данная статья.

Строение $\Gamma_2(a)$ вполне регулярного графа с параметрами (32, 6, 0, 2)

Теорема 1 Пусть a – некоторая, фиксированная вершина вполне регулярного графа Γ с параметрами (32, 6, 0, 2). Тогда ($[a]$, $\Gamma_2(a)$) – блок-схема с параметрами (6, 15, 5, 2, 1).

Доказательство. Пусть a – некоторая вершина графа. Тогда $[a]$ содержит 6 вершин: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Т.к. граф регулярный, то каждая вершина из $[a]$ смежна точно с пятью вершинами из $\Gamma_2(a)$.

Из прямоугольного соотношения $k(k-\lambda-1) = |\Gamma_2(a)|\mu$, получаем, что $|\Gamma_2(a)| = 15$. Обозначим множество всех вершин $\Gamma_2(a) = \{b_1, b_2,\ldots, b_{15}\}$.

Пусть, теперь, вершина a_1 смежна с вершинами b_1, b_2, b_3, b_4 и b_5. из $\Gamma_2(a)$. Т.к. вершины a_1 и a_2 находятся на расстоянии 2 (они обе смежны с вершиной a), то в $\Gamma_2(a)$ есть ещё одна вершина, которая смежна с ними обоими. Пусть эта вершина будет b_1. Т.к. мы предполагаем, что граф вполне регулярный и $\mu(a_1, a_2) = \{a, b_1\}$, то других вершин, смежных с вершинами a_1 и a_2 в $\Gamma_2(a)$ не существует. Но, $|\mu(a_1, a_3)| = 2$. Поэтому в $\mu(a_1, a_3)$ существует ещё одна вершина, смежная с a_1 и a_3 и это не может быть b_1, т.к. в этом случае, $\mu(a, b_1) = \{a_1, a_2, a_3\}$. Не умаляя общности можно считать, что $\mu(a_1, a_3) = \{a, b_2\}$. Рассуждая аналогично, получим:

$\mu(a_1, a_2) = \{a, b_1\}$, $\mu(a_1, a_3) = \{a, b_2\}$, $\mu(a_1, a_4) = \{a, b_3\}$, $\mu(a_1, a_5) = \{a, b_4\}$, $\mu(a_1, a_6) = \{a, b_5\}$.

Пусть $X_1 = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Это все те вершины из $\Gamma_2(a)$, с которыми смежна вершина a_1. Обозначим через X_2 множество всех вершин из $\Gamma_2(a)$, смежных с a_2, но не смежных с a_1. Т.к. $\mu(a_1, a_2) = \{a, b_1\}$, то $|X_2| = 4$. Не умаляя общности, можно считать, что $X_2 = \{b_6, b_7, b_8, b_9\}$. Т.к. $|\mu(a_2, a_3)| = 2$ и $a \in \mu(a_1, a_3)$, то в $\Gamma_2(a)$ существует единственная вершина, смежная с a_2, и a_3. Пусть это будет b_6. Тогда можно считать, что

$\mu(a_2, a_3) = \{a, b_6\}$, $\mu(a_2, a_4) = \{a, b_7\}$, $\mu(a_2, a_5) = \{a, b_8\}$, $\mu(a_2, a_6) = \{a, b_9\}$. Обозначим через X_3 множество всех вершин из $\Gamma_2(a)$, смежных с a_3, но не смежных ни с вершиной a_2, ни с вершиной a_1. Т.к $\mu(a_1, a_3) = \{a, b_2\}$ и $\mu(a_2, a_3) = \{a, b_6\}$, то $|X_3| = 3$. Не умаляя общности можно считать, что $X_3 = \{b_{10}, b_{11}, b_{12}\}$. Рассуждая аналогично, можно считать, что

$\mu(a_3, a_4) = \{a, b_{10}\}$, $\mu(a_3, a_5) = \{a, b_{11}\}$, $\mu(a_3, a_6) = \{a, b_{12}\}$.

Обозначим через X_4 множество всех вершин из $\Gamma_2(a)$, смежных с a_4, но не смежных ни с вершиной a_3, ни с вершиной a_2, ни с вершиной a_1.

Т.к $\mu(a_1, a_4) = \{a, b_3\}$, $\mu(a_2, a_4) = \{a, b_7\}$ и $\mu(a_3, a_4) = \{a, b_{10}\}$, то $|X_4| = 2$. Не умаляя общности можно считать, что $X_4 = \{b_{13}, b_{14}\}$. Рассуждая аналогично, можно считать, что $\mu(a_4, a_5) = \{a, b_{13}\}$, $\mu(a_4, a_6) = \{a, b_{14}\}$.

Тогда, в $\Gamma_2(a)$ осталась только одна вершина b_{15}, смежная с a_5 и a_6. $X_5 = \{b_{15}\}$. Теорема доказана.

Обозначим через α_i количество вершин графа $\Gamma_2(a)$, смежных с вершиной b_i, лежащих в $\Gamma_3(a)$. Тогда, поскольку степень графа равна 6 и граф связен, то, то $1 \le \alpha_i \le 4$.

Теорема 2 Пусть Γ – вполне регулярный граф с параметрами (32, 6, 0, 2) не может быть дистанционно регулярным.

Доказательство.

(1) Если каждая вершина из $\Gamma_2(a)$ смежна с четырьмя вершинами из $\Gamma_3(a)$ (т.е. $\alpha_i = 4$), то количество ребер выходящих из $\Gamma_2(a)$ в $\Gamma_3(a)$ равно $15\cdot 4 = 60$. А так как степень графа Γ равна 6 и, $\left|\Gamma - a - [a] - \Gamma_2(a)\right| = 32 - 1 - 6 - 15 = 10$, то каждая из оставшихся 10 вершин лежит в $\Gamma_3(a)$. Пусть $\Gamma_3(a) = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}\}$. Заметим, что число рёбер между a и $[a]$ равно 6, между $[a]$ и $\Gamma_2(a)$ равно 30, а между $\Gamma_2(a)$ и $\Gamma_3(a)$ равно 60. Всего же рёбер в графе Γ равно $32\cdot 6/2 = 96$. Таким образом, в $\Gamma_3(a)$ ребер нет. Другими словами, каждое из множеств: a, $[a]$, $\Gamma_2(a)$, $\Gamma_3(a)$ – коклики. Пусть теперь, вершина c_1 смежна с вершинами b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6. Так как в $\Gamma_3(a)$ рёбер нет, то вершины c_1 и c_2 не могут быть смежными, а так как $\mu(c_1, c_2) = 2$, то в $\Gamma_2(a)$ найдутся две вершины, смежные как с c_1, так и c_2. А так как $[c_1] = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$, то $\mu(b_1, b_2)$ содержит вершины a_1, c_1 и c_2. Противоречие.

2) Пусть каждая вершина из $\Gamma_2(a)$ смежна с тремя вершинами из $\Gamma_3(a)$ (т.е. $\alpha_i = 3$). Тогда $\Gamma_2(a)$ граф степени 1, но тогда число вершин в $\Gamma_2(a)$ должно быть чётным. Противоречие.

(3) Пусть каждая вершина из $\Gamma_2(a)$ смежна с двумя вершинами из $\Gamma_3(a)$ (т.е. $\alpha_i = 2$). Тогда $\Gamma_2(a)$ – граф степени 2 на 15 вершинах. В этом случае, число рёбер в подграфе $a \cup [a] \cup \Gamma_2(a)$ равно $6 + 5\cdot 6 + 15\cdot 2 = 66$. Между $\Gamma_2(a)$ и $\Gamma_3(a)$ ровно $15\cdot 2 = 30$ рёбер. Так как всего рёбер в графе 96, то на оставшихся 10

вершинах рёбер нет. Каждая вершина из $\Gamma_3(a)$ смежна с шестью вершинами из $\Gamma_2(a)$. Но, число рёбер, выходящих из $\Gamma_3(a)$ в $\Gamma_2(a)$ равно $10\cdot 6 = 60$. Следовательно, в $\Gamma_3(a)$ не может быть 10 вершин.

(4) Пусть каждая вершина из $\Gamma_2(a)$ смежна с единственной вершиной из оставшихся 10 (т.е. $\alpha_i = 1$). Тогда $\Gamma_2(a)$ – граф, степени 3 на 15 вершинах. противоречие.

Список литературы

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs// Berlin etc: Springer-Verlag – 1989.

2. Махнёв А.А., Носов В.В. Об автоморфизмах графов с λ = 0, μ = 2. //Математический сборник. Том 195, №3, 2004, С. 47-68

СЕКЦИЯ №7.
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.07)

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ МАТРИЦЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ЧИСЛАМИ, ИСПОЛЬЗУЯ СПЛАЙНЫ ЛАГРАНЖЕВОГО ТИПА

Бурова И.Г., Малевич А.В.

ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Аннотация

Предложен метод определения наибольшего собственного числа матрицы с положительными собственными числами. Метод построен на основе применения полиномиальных локальных сплайнов лагранжевого типа пятого порядка аппроксимации.

Ключевые слова: наибольшее собственное число матрицы, локальные сплайны

Довольно часто при решении различных задач математической физики необходимо решать системы линейных алгебраических уравнений (далее СЛАУ) с положительными собственными числами. К таким матрицам относятся положительно определенные симметричные матрицы. Особый интерес представляют положительно определенные плохо обусловленные матрицы (см, например, [3,4,8]). Важной задачей, связанной с решением СЛАУ, является вычисление собственных значений матрицы [16]. Для локализации собственных значений обычно используют теорему Гершгорина. Теория нахождения собственных значений постоянно дополняется модифицированными методами (см, например, [12,13,15]). Идея метода интерполяции для вычисления собственных чисел матрицы была предложена в 1960 году советскими математиками Фаддеевым Дмитрием Константиновичем и Фаддеевой Верой Николаевной (см. книгу [5]). Применила метод Фаддеева Д.К. и Фаддеевой В.Н. к новым условиям для новых сплайнов профессор СПбГУ Бурова Ирина Герасимовна. В модифицированном интерполяционном методе предлагается нахождение действительных собственных значений матрицы с вещественными элементами, основанный на использовании полиномиальных сплайнов Лагранжева типа [1,2,6,7,9,10,11,17]. Этот метод может быть использован как для вычисления собственных значений симметричных положительно определенных матриц, так и несимметричных матриц с положительными собственными числами. Основными особенностями локальных сплайнов Лагранжевого типа являются следующие: аппроксимация строится отдельно для каждого интервала сетки, аппроксимация строится как сумма произведений базисных сплайнов и значений функции в узлах и (или) значений ее производных. Базисные сплайны определяются с помощью некоторой системы фундаментальных соотношений.

1 О вычислении собственных значений

Пусть матрица $H_n = \left(h_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ – произвольная симметричная и положительно определенная (или почти симметричная с положительными собственными числами). Обозначим E_n – единичную матрицу размерности *n*. Вычислим максимальное собственное значение матрицы H_n. Для локализации собственных значений применим теорему Гершгорина.

Предлагаемый метод предполагает вычисление определителей. Далее покажем, что можно ограничиться вычислением шести определителей. Вначале построим функцию $F(t) = H_n - tE_n$. Используя теорему Гершгорина вычислим промежутки $D_k = [a_k, b_k]$, где существуют собственные значения. Предполагаем, что объединение этих промежутков представляет собой связную область. Далее обозначим через $\|g\|_{[a,b]} = max_{[a,b]}|g(x)|$.

2 Применение сплайнов Лагранжевого типа

Пусть $F \in C^5(R^1)$. Пусть $\{t_j\}$ – множество упорядоченных узлов, $\{t_j\} \in \ \cup D_k$. Выберем эти узлы так, чтобы наибольший узел совпадал с крайней правой границей области $\cup D_k$. Очевидно, что левую границу можно взять нулем. На каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ построим полином $P_4(t) = \sum_j \det\left(F(t_j)\right) w_j(t)$, где $w_j(t)$ локальные базисные функции, которые получаем решая систему аппроксимационных соотношений $P_4(t) = P(t)$, $P(t) = t^s, s = 0, 1, 2, 3, 4$. Эти баазисные сплайны называются полиномиальными сплайнами лагранжевого типа максимального дефекта. Они рассматривались в работах В.С. Рябенького, С.Г. Михлина, Ю.К. Демьяновича. Пусть носитель функции w_j состоит из пяти соседних сеточных промежутков и $h = max_i h_i$, $h_i = t_{i+1} - t_i$. На каждом интервале $[t_i, t_{i+1}]$ мы можем построить аппроксимацию с помощью локальных сплайнов, которую обозначим как $P_4^k(t)$. Количество узлов сетки может быть произвольным, минимальное количество узлов равно шести, а шаг сетки может быть постоянным.

2.1. Первый вариант

Аппроксимация на крайнем правом сеточном интервале может быть получена с помощью соотношения:

$$P_4^1(t) = \sum_{j=i-4}^{j=i} \det\left(F(t_j)\right) w_j(t), t \in [t_i, t_{i+1}], \tag{1}$$

где

$$w_i(t) = \frac{(t - t_{i-4})(t - t_{i-3})(t - t_{i-2})(t - t_{i-1})}{(t_i - t_{i-4})(t_i - t_{i-3})(t_i - t_{i-2})(t_i - t_{i-1})},$$
$$w_{i-1}(t) = \frac{(t - t_{i-4})(t - t_{i-3})(t - t_{i-2})(t - t_i)}{(t_{i-1} - t_{i-4})(t_{i-1} - t_{i-3})(t_{i-1} - t_{i-2})(t_{i-1} - t_i)},$$
$$w_{i-2}(t) = \frac{(t - t_{i-4})(t - t_{i-3})(t - t_{i-1})(t - t_i)}{(t_{i-2} - t_{i-4})(t_{i-2} - t_{i-3})(t_{i-2} - t_{i-1})(t_{i-2} - t_i)},$$
$$w_{i-3}(t) = \frac{(t - t_{i-4})(t - t_{i-2})(t - t_{i-1})(t - t_i)}{(t_{i-3} - t_{i-4})(t_{i-3} - t_{i-2})(t_{i-3} - t_{i-1})(t_{i-3} - t_i)},$$
$$w_{i-4}(t) = \frac{(t - t_{i-3})(t - t_{i-2})(t - t_{i-1})(t - t_i)}{(t_{i-4} - t_{i-3})(t_{i-4} - t_{i-2})(t_{i-4} - t_{i-1})(t_{i-4} - t_i)}.$$

Оценим погрешность интерполирования на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$. Обозначим $w(t) = \prod_{j=i-4}^{i}(t - t_j)$, положим $t = t_i + \tau h, \tau \in [0,1]$.

Погрешность аппроксимации получаем используя формулу остатка интерполяции Лагранжа: $R_4(t) = P_4^1 - F = \frac{F^{(5)}(s)}{5!} w(t)$. Имеем:

$$||P_4^1 - F||_{[t_i, t_{i+1}]} \leq 120h^5 \frac{\|F^{(5)}\|_{[t_{i-4}, t_{i+1}]}}{5!}.$$

2.2 Второй вариант

Аппроксимация на промежутке, который находится слева от самого правого сеточного интервала, может быть получена так:

$$P_4^2(t) = \sum_{j=i-3}^{j=i+1} \det\left(F(t_j)\right) w_j(t), t \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{2}$$

где

$$w_{i-3}(t) = \frac{(t - t_{i-2})(t - t_{i-1})(t - t_i)(t - t_{i+1})}{(t_{i-3} - t_{i-2})(t_{i-3} - t_{i-1})(t_{i-3} - t_i)(t_{i-3} - t_{i+1})},$$
$$w_{i-2}(t) = \frac{(t - t_{i-3})(t - t_{i-1})(t - t_i)(t - t_{i+1})}{(t_{i-2} - t_{i-3})(t_{i-2} - t_{i-1})(t_{i-2} - t_i)(t_{i-2} - t_{i+1})},$$
$$w_{i-1}(t) = \frac{(t - t_{i-3})(t - t_{i-2})(t - t_i)(t - t_{i+1})}{(t_{i-1} - t_{i-3})(t_{i-1} - t_{i-2})(t_{i-1} - t_i)(t_{i-1} - t_{i+1})},$$
$$w_i(t) = \frac{(t - t_{i-3})(t - t_{i-2})(t - t_{i-1})(t - t_{i+1})}{(t_i - t_{i-3})(t_i - t_{i-2})(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1})},$$

$$w_{i+1}(t)=\frac{(t-t_{i-3})(t-t_{i-2})(t-t_{i-1})(t-t_i)}{(t_{i+1}-t_{i-3})(t_{i+1}-t_{i-2})(t_{i+1}-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)}.$$

Оценим погрешность аппроксимации. Аналогично предыдущему пункту получаем

$$||P_4^2-F||_{[t_i,t_{i+1}]}\leq K\frac{h^5}{5!}\left\|F^{(5)}\right\|_{[t_{i-3},t_{i+1}]}, K=3{,}632.$$

2.3 Третий вариант

В интервале слева от предыдущего мы можем применить аппроксимацию

$$P_4^3(t)=\sum_{j=i-2}^{j=i+2}\det\left(F(t_j)\right)w_j(t), t\in[t_i,t_{i+1}], \tag{3}$$

где

$$w_{i-2}(t)=\frac{(t-t_{i-1})(t-t_i)(t-t_{i+1})(t-t_{i+2})}{(t_{i-2}-t_{i-1})(t_{i-2}-t_i)(t_{i-2}-t_{i+1})(t_{i-2}-t_{i+2})},$$
$$w_{i-1}(t)=\frac{(t-t_{i-2})(t-t_i)(t-t_{i+1})(t-t_{i+2})}{(t_{i-1}-t_{i-2})(t_{i-1}-t_i)(t_{i-1}-t_{i+1})(t_{i-1}-t_{i+2})},$$
$$w_i(t)=\frac{(t-t_{i-2})(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})(t-t_{i+2})}{(t_i-t_{i-2})(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})(t_i-t_{i+2})},$$
$$w_{i+1}(t)=\frac{(t-t_{i-2})(t-t_{i-1})(t-t_i)(t-t_{i+2})}{(t_{i+1}-t_{i-2})(t_{i+1}-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)(t_{i+1}-t_{i+2})},$$
$$w_{i+2}(t)=\frac{(t-t_{i-2})(t-t_{i-1})(t-t_i)(t-t_{i+1})}{(t_{i+2}-t_{i-2})(t_{i+2}-t_{i-1})(t_{i+2}-t_i)(t_{i+2}-t_{i+1})}.$$

Аналогично предыдущему получаем.

$$||P_4^3-F||_{[t_i,t_{i+1}]}\leq K\frac{h^5}{5!}\left\|F^{(5)}\right\|_{[t_{i-2},t_{i+2}]}, K=0{,}864.$$

2.4 Четвертый вариант

На интервале слева от предыдущего мы можем применить формулу вида:

$$P_4^4(t)=\sum_{j=i-1}^{j=i+3}\det\left(F(t_j)\right)w_j(t), t\in[t_i,t_{i+1}], \tag{4}$$

где

$$w_{i-1}(t)=\frac{(t-t_i)(t-t_{i+1})(t-t_{i+2})(t-t_{i+3})}{(t_{i-1}-t_i)(t_{i-1}-t_{i+1})(t_{i-1}-t_{i+2})(t_{i-1}-t_{i+3})},$$
$$w_i(t)=\frac{(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})(t-t_{i+2})(t-t_{i+3})}{(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})(t_i-t_{i+2})(t_i-t_{i+3})},$$
$$w_{i+1}(t)=\frac{(t-t_{i-1})(t-t_i)(t-t_{i+2})(t-t_{i+3})}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)(t_{i+1}-t_{i+2})(t_{i+1}-t_{i+3})},$$
$$w_{i+2}(t)=\frac{(t-t_{i-1})(t-t_i)(t-t_{i+1})(t-t_{i+3})}{(t_{i+2}-t_{i-1})(t_{i+2}-t_i)(t_{i+2}-t_{i+1})(t_{i+2}-t_{i+3})},$$
$$w_{i+3}(t)=\frac{(t-t_{i-1})(t-t_i)(t-t_{i+1})(t-t_{i+2})}{(t_{i+3}-t_{i-1})(t_{i+3}-t_i)(t_{i+3}-t_{i+1})(t_{i+3}-t_{i+2})}.$$

Оценим погрешность аппроксимации. Получаем

$$||P_4^4-F||_{[t_i,t_{i+1}]}\leq K\frac{h^5}{5!}\left\|F^{(5)}\right\|_{[t_{i-1},t_{i+3}]}, K=1{,}21.$$

2.5 Пятый вариант

В интервале слева от предыдущего мы можем применить аппроксимацию

$$P_4^5(t)=\sum_{j=i}^{j=i+4}\det\left(F(t_j)\right)w_j(t), t\in[t_i,t_{i+1}], \tag{5}$$

где

$$w_i(t)=\frac{(t-t_{i+1})(t-t_{i+2})(t-t_{i+3})(t-t_{i+4})}{(t_i-t_{i+1})(t_i-t_{i+2})(t_i-t_{i+3})(t_i-t_{i+4})},$$
$$w_{i+1}(t)=\frac{(t-t_i)(t-t_{i+2})(t-t_{i+3})(t-t_{i+4})}{(t_{i+1}-t_i)(t_{i+1}-t_{i+2})(t_{i+1}-t_{i+3})(t_{i+1}-t_{i+4})},$$

$$w_{i+2}(t)=\frac{(t-t_i)(t-t_{i+1})(t-t_{i+3})(t-t_{i+4})}{(t_{i+2}-t_i)(t_{i+2}-t_{i+1})(t_{i+2}-t_{i+3})(t_{i+2}-t_{i+4})},$$
$$w_{i+3}(t)=\frac{(t-t_i)(t-t_{i+1})(t-t_{i+2})(t-t_{i+4})}{(t_{i+3}-t_i)(t_{i+3}-t_{i+1})(t_{i+3}-t_{i+2})(t_{i+3}-t_{i+4})},$$
$$w_{i+4}(t)=\frac{(t-t_i)(t-t_{i+1})(t-t_{i+2})(t-t_{i+3})}{(t_{i+4}-t_i)(t_{i+4}-t_{i+1})(t_{i+4}-t_{i+2})(t_{i+4}-t_{i+3})}$$

Для оценки погрешности аппроксимации получаем

$$||P_4^5-F||_{[t_i,t_{i+1}]}\le K\frac{h^5}{5!}\left\|F^{(5)}\right\|_{[t_{i-1},t_{i+3}]}, K=3{,}632$$

3. Результаты вычислений для несимметричной матрицы с положительными собственными числами

Пусть матрица $H_n=\left(h_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ является матрицей Гильберта ($h_{i,j}=\frac{1}{(i+j-1)}$) Таким образом, эта матрица симметричная и положительно определенная (по поводу матриц Гильберта см. [3,4,5,8]).. Построим на основе этой матрицы несимметричную матрицу с положительными собственными числами следующим образом. Пусть $n=20$, заменим элемент $h_{20,1}=\frac{1}{20}$ матрицы H_{20} на элемент $\tilde{h}_{20,1}=\frac{1}{20.1}$ и $h_{1,20}=\frac{1}{20}$ на $\tilde{h}_{1,20}=\frac{1}{20.1}$. Получили матрицу $\widetilde{H}_{20}$ в которой все элементы кроме $\tilde{h}_{20,1}$ и $\tilde{h}_{1,20}$ совпадают с элементами матрицы H_{20}. Матрица $\widetilde{H}_{20}$ несимметричная и $\left\|\widetilde{H}_{20}-H_{20}\right\|\le 0.000251=\delta$ (используем Эвклидову норму). Впрочем, норма разности особого значения не имеет.

Вычислим наибольшее собственное значение матрицы $\widetilde{H}_{20}$. С помощью теоремы Гершгорина получаем область, в которой содержатся все собственные числа: $[-1.59, 3.60]$. Все собственные значения матрицы $\widetilde{H}_{20}$ положительные, поэтому мы можем рассматривать область $[0, 3.60]$. Возьмем пять узлов, включая границы области, пусть сетка узлов будет равномерная, имеем $h\approx 0.72$. Итак, имеем $t_0=0, t_1\approx 0.72, t\approx 1.439, t_3\approx 2.1588, t_4\approx 2.878, t_5\approx 3.598$. Используя полученные формулы, видим, что в $[t_4,t_5]$ и $[t_3,t_4]$ нет корней. Используя формулу (3) вычисляем корень $\mu\in[t_2,t_3]$: $\mu\approx 2.1573$.
Это первое грубое приближение к наибольшему собственному числу. Далее берем промежуток $[t_2,t_3]$, делим его на пять частей и повторяем процесс.

После второй итерации получаем новое приближение к наибольшему собственному значению, оно равно 1.8993. После третьей итерации получаем 1.907127. Отметим для сравнения, что с помощью библиотечной процедуры в MatLab получаем для наибольшего собственного значения число 1.907135.

Список литературы

[1] Бурова И.Г., Об аппроксимации квадратичными и кубическими минимальными сплайнами, Методы вычислений. Вып. 20: Сб. статей / Под.ред. В.М.Рябова. —СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2003. —164 с.

[2] Бурова И.Г, Демьянович Ю.К. Теория минимальных сплайнов. Изд-во С.-Пб. ун-та, 2000.

[3] Рябов В.М., Бурова И.Г., Кальницкая М.А., Малевич А.В., О численном решении СЛАУ с плохо обусловленными матрицами // Материалы 7-й всероссийской научной конференции по проблемам информатики СПИСОК-2017 – СПб. – 2017. – С. 199–204.

[4] Рябов В.М., Бурова И.Г., Кальницкая М.А., Малевич А.В., Лебедева А.В., Борзых А.Н. О численном решении систем линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленными матрицами // Международный научно-исследовательский журнал. Физико-математические науки. – Екатеринбург – 2018. – № 12 (78). – Часть 1. – С. 13–17.

[5] Фаддеев Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры [Электронный ресурс]: учеб. / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. - Электрон. дан. - Санкт-Петербург: Лань, 2009. - 736 с. - Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/400

[6] Ahlberg J.H., Nilson E. N., Walsh J. L., Theory of Splines and Their Applications, Mathematics in Science and Engineering, Chapt. IV. Academic Press, New York, 1967.

[7] Burova I.G., Construction of trigonometric splines, Vestnik St. Petersburg University: Mathematics, Vol. 37, No 2, 2004, pp. 6-11.

[8] Burova I.G., Kalnitskaia M.A., Malevich A.V. On the Numerical Solution of System of Linear Algebraic Equations with Positive Definite Symmetric Ill-Posed Matrices // WSEAS TRANSACTIONS on MATHEMATICS – 2018 – V. 17. – P. 13–19.
[9] Burova, I. G., Ryabov, V. M., Kalnitskaia, M. A., Malevich, A. V., The interpolation method for calculating eigenvalues of matrices. WSEAS Transactions on Systems and Control, Vol. 14, No 13, 2019, pp. 104-111
[10] Dem'yanovich Yu.K., Approximation by Minimal Splines. J. of Math. Sci., Vol.193, No 2, 2013, pp. 261-266.
[11] de Boor Carl, A Practical Guide to Splines, Springer-Verlag. New York. Heidelberg Berlin, 1978.
[12] Hari V., Globally convergent Jacobi methods for positive definite matrix pairs. Numerical Algorithms, Vol.17, 2017, pp. 1-29.
[13] Kishida M., On problems involving eigenvalues for uncertain matrices by structured singular values. In: IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 62, No 12, 2017, pp. 6657-6663.
[14] Le Verrier U.J.J., Sur les variations séculaires des éléments des orbites, pour les sept planets principals, Mercure, Vénus, la Terre, Connaissance des Temps, 1840, Additions, pp. 3-66.
[15] Rezgui H., Choutri A., An inverse eigenvalue problem. Application: Graded-index optical fibers, Optical and Quantum Electronics, October 2017, pp. 49-321.
[16] Saad Yousef, Numerical methods for large eigenvalue problems, SIAM, 2011.
[17] Walsh J.L., Interpolation and approximation, 3rd ed., Amer. Math. Soc. Colloquium Publications., Vol. 20, Amer. Math. Soc, Providence, R.L,1960.

ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА ХААРА НА МНОГООБРАЗИИ[1]

Демьянович Ю.К., Бурова И.Г., Музафарова Э.Ф.

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», г. Санкт-Петербург

Аннотация

В данной работе построены обобщенные пространства типа Хаара на многообразии, дан адаптивный алгоритм укрупнения клеточного подразделения многообразия и установлены калибровочные соотношения между координатными функциями объемлющего и вложенного пространств указанного типа. В работе рассмотрено понятия клеточного подразделения, элементарного укрупнения, введен ε-критерий, а также введено понятие модератора адаптивного укрупнения.

Ключевые слова: сплайны, функции Хаара, клеточное подразделение многообразия, калибровочные соотношения, вложенность пространств

1 Введение

Построение адаптивных сеток при аппроксимации функций, при построении методов конечных элементов и методов сеток, при эффективных вейвлетных разложениях является животрепещущей проблемой (см. [1] – [29], [31] – [33]). С одной стороны, эти сетки должны обслуживать весьма сложные конфигурации рассматриваемых областей, а с другой стороны, они должны достаточно легко настраиваться на структуру функций, определяемых в этих областях. Поэтому представляется достаточно актуальным построение соответствующих алгоритмов в весьма общих условиях, в частности для функций, заданных на многообразиях.

Цель данной работы состоит в том, чтобы построить обобщенные пространства типа Хаара на многообразии, дать адаптивный алгоритм укрупнения клеточного подразделения многообразия и установить калибровочные соотношения между координатными функциями объемлющего и вложенного пространств типа Хаара. Частным случаем представленных здесь результатов являются результаты, полученные ранее в одномерном случае (см. [28]).

Для достижения указанной цели в работе вводятся нестандартные понятия клеточного подразделения, элементарного укрупнения, расширяемой и предельной клеток. Кроме того, здесь рассматривается ε-критерий, а также вводится понятие модератора адаптивного укрупнения.

[1] Работа частично поддержана грантом РФФИ 15-01-008847.

Имеется ряд других классов локальных укрупнений (см. [9], [26]); они не рассматриваются в данной работе.

2 Обозначения и вспомогательные утверждения. Многообразие и его клеточное подразделение

Рассмотрим гладкое –мерное (вообще говоря, некомпактное) многообразие $\mathfrak{M}$ (т.е. топологическое пространство, в котором каждая точка обладает окрестностью, диффеоморфной открытому n-мерному шару эвклидова пространства $\mathbb{R}^n$). Введем систему дифференцируемых координат на $\mathfrak{M}$, т.е. семейство открытых множеств $\{U_\varsigma\}_{\varsigma\in Z}$, покрывающих $\mathfrak{M}$ и таких гомеоморфизмов $\psi_\varsigma, \psi_\varsigma \in E_\varsigma \mapsto U_\varsigma$ открытых шаров E_ς пространства $\mathbb{R}^n$, что отображения

$$\psi_\varsigma^{-1}, \psi_{\varsigma'}: \psi_\varsigma^{-1}(U_\varsigma \cap U_{\varsigma'}) \mapsto \psi_\varsigma^{-1}(U_\varsigma \cap U_{\varsigma'})$$

(при всех тех $\varsigma, \varsigma' \in Z$, для которых $U_\varsigma \cap U_{\varsigma'} \neq \emptyset$) непрерывно дифференцируемо (нужное число раз); здесь Z – некоторое множество индексов. Тройка $\psi_\varsigma: E_\varsigma \mapsto U_\varsigma$ называется картой, множество $\mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi_\varsigma: E_\varsigma \mapsto U_\varsigma | \varsigma \in Z$ – атласом, представляющим многообразие $\mathfrak{M}$.

Пусть $\mathcal{M}$ - некоторое подмножество в $\mathfrak{M}$. Точку $m \in \mathcal{M}$ будем называть внутренней точкой в $\mathcal{M}$, если у этой точки существует окрестность, целиком лежащая в $\mathcal{M}$. Совокупность внутренних точек множества $\mathcal{M}$ в дальнейшем обозначается $\mathcal{M}'$. Обозначая Cl операцию замыкания (в топологии многообразия $\mathfrak{M}$), рассмотрим совокупность $\partial\mathcal{M}$ граничных точек множества $\mathcal{M}$, $\partial\mathcal{M} = Cl(\mathcal{M})\backslash\mathcal{M}'$. Всегда считаем, что $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M} \subset Cl(\mathcal{M})$. Если $\mathcal{M} -$ открытое множество, то $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ и $\mathcal{M} \cap \partial\mathcal{M} = \emptyset$, а если $\mathcal{M}$- замкнутое, то $\mathcal{M}\backslash\mathcal{M}' = \partial\mathcal{M}$.

Будем говорить, что множество $\mathcal{M}$ разбито на множества $C_i, i \in I$, если $C_i \cap C_{i'} = \emptyset\ \forall\ i, i' \in I, i \neq i'$ и $\mathcal{M} = \cup_{i\in I} C_i$. Множество $C \stackrel{\text{def}}{=} \{C_i\}_{i\in I}$ называется разбиением множества $\mathcal{M}$. Если к тому же каждое подмножество $C_i' \forall\ i \in I$ гомеоморфно открытому шару пространтсва $\mathbb{R}^n$, то такое разбиение называется клеточным подразделением[2] множества $\mathcal{M}$, а множества $C_i -$ клетками. Укрупнением D разбиения C называется такое разбиение $\{D_j\}_{j\in J}$ множества $\mathcal{M}$, при котором для каждого $i \in I$ найдется такое $j \in J, j = j(i)$, что $C_i \subset D_j$. Если оба разбиения являются клеточными подразделениями, то говорят об укрупнении клеточного подразделения. Ясно, что отображение $j(i)$ однозначно, ибо в противном случае нашлось бы два множества $D_{j'}$ и $D_{j''}$, $j' \neq j''$, содержащие множество C_i, что означало бы, что пересечение множеств $D_{j'}$ и $D_{j''}$ не пусто (а это противоречит тому, что D разбиение).

Очевидно следующее свойство: каждое множество D_j является объединением некоторого набора множеств C_i. Обозначим $I_j = \{i | i \in I, D_j \cap C_i \neq \emptyset\}$. Тогда[3] $D_j = \cup_{i\in I_j} C_i$.

Рассмотрим некоторое множество $J_0 \subset J$ и выделим совокупность клеток $C_{J_0} = \cup_{j\in J_0} \{C_i\}_{i\in I_j}$из множества C, затем добавим множество клеток $\{D_j\}_{j\in J_0}$. Ясно, что полученное множество $E \stackrel{\text{def}}{=} C_{J_0} \cup \{D_j\}_{j\in J_0}$ также является клеточным подразделением множества $\mathcal{M}$.

Итак, пусть $E \stackrel{\text{def}}{=} \{E_s\}_{s\in S}$ - клеточное подразделение для $\mathcal{M}$.

Определение 1. *Клетка $E_{i'}$ называется соседней для клетки $E_i (i, i' \in S)$ в клеточном подразделении E, если $i \neq i'$, и существует точка t, лежащая на границе ∂E_i клетки E_i, некоторая окрестность которой принадлежит объединению $E_i \cup E_{i'}$.*

Очевидно, что если клетка $E_{i'}$ является соседней для клетки E_i, то и E_i является соседней для $E_{i'}$. Клетки E_i и $E_{i'}$ дальше называем соседними клетками. Для констатации того, что клетки являются соседними, используем символ $\approx$, так что для соседних клеток пишем $E_i \approx E_{i'}$.

Введем обозначение $J_m \stackrel{\text{def}}{=} \{0,1,2, \dots, m-1\}$.

Пусть совокупность $\mathfrak{C} = \{\mathfrak{C}_i | i \in J_M\}$ образует исходное клеточное подразделение многообразия $\mathfrak{M}$. Здесь M - некоторое натуральное число. В дальнейшем займемся последовательным укрупнением этого подразделения, объединяя соседние клетки в одну клетку.

Предположим, что функция $f(t)$ задана на $\mathfrak{M}$ и принимает неотрицательные значения

$$f(t) \geq 0 \quad \forall\, t \in \mathfrak{M}. \tag{1}$$

В дальнейшем эта функция играет важную роль при укрупнению исходного подразделения. Ее будем называть модератором адаптивного укрупнения.

Рассмотрим функцию множества $\omega \in \mathfrak{M}$, определяемую соотношением

---

[2] Иногдв клеточным подразделением для $\mathcal{M}$ называют совокупность открытых множеств $\{C_i'\}_{i\in I}$

[3] Действительно, если $m \in D_j$, а значит найдется $s \in$ I так, что $m \in C_s$ ибо C – разбиение $\mathcal{M}$) так что $D_j \cap C_s \neq \emptyset$ и значит $s \in J_i$ и поэтому $m \in \cup_{i\in I_j} C_i$. Обратно: если $m \in \cup_{i\in I_j} C_i$, то найдётся $s \in J_i$.

$$\phi_f(\omega) \overset{\text{def}}{=} \max_{t\in\omega} f(t) mes_n \omega. \tag{2}$$

Очевидно, что функция ϕ_f обладает следующим свойством монотонности:

$$\omega' \subset \omega'' \subset \mathfrak{M} \Rightarrow \phi_f(\omega') \le \phi_f(\omega''). \tag{3}$$

Укрупнение исходного подразделения $\mathfrak{C}$ будем производить последвательными шагами, объединяя группу клеток упомянутого подразделения так, чтобы множество внутренних точек полученного объединения было гомеоморфно открытому шару пространства $\mathbb{R}^n$. Таким образом на очередном шаге появляется очередная клетка укрупнения. Укрупнение полученной клетки может быть продолжено присоединением клетки исходного подразделения, если присоединяемая клетка еще не принимала участия в укрупнении (т.е. не являлась присоединяемой). На каждом шаге укрупнения множество клеток исходного подразделения распадается на два множества. Одно множество $\widetilde{\mathfrak{C}} \overset{\text{def}}{=} \{\mathfrak{C}_i\}_{i\in\tilde{J}}$ - это множество тех клеток исходного подразделения, которые не участвовали в укрупнении. Второе множество - это множество $\widehat{\mathfrak{C}} \overset{\text{def}}{=} \{\mathfrak{C}_i\}_{i\in\hat{J}}$ клеток, которые уже участвовали в укрупнении. Клетки первого множества называются допустимыми, а клетки второго множества - исключенными. Ясно, что $\widetilde{\mathfrak{C}} \cup \widehat{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}$, $\widetilde{\mathfrak{C}} \cap \widehat{\mathfrak{C}} = \emptyset$, $\tilde{J} \cup \hat{J} = J_M$, $\tilde{J} \cap \hat{J} = \emptyset$. Благодаря вышеупомянутым шагам множества $\widehat{\mathfrak{C}}, \hat{J}$ будут расширяться, а множества $\widetilde{\mathfrak{C}}, \tilde{J}$ будут сокращаться. Окончание процесса укрупнения соответствует случаю, когда $\widetilde{\mathfrak{C}} = \emptyset$, $\hat{J} = \emptyset$, $\widehat{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}$, $\hat{J} = J_M$.

Для описания этого процесса введем операцию элементарного укрупнения клетки.

Пусть уже построена клетка ω. Если для ω существует хотя бы одна соседняя клетка из $\widetilde{\mathfrak{C}}$, то множество $I' \overset{\text{def}}{=} \{i'\} \subset \tilde{J}$ индексов i', удовлетворяющих условию

$$\mathfrak{C}_{i'} \approx \omega, \qquad \phi_f(\omega \cup \mathfrak{C}_{i'}) \le \phi_f(\omega \cup \mathfrak{C}_i) \ \forall \mathfrak{C}_i \approx \omega \tag{4}$$

не пусто. Обозначим i_0 - минимальный индекс во множестве I',

$$i_0 \overset{\text{def}}{=} \min_{i'\in I'}\{i'\} \qquad \omega^+ = \omega \cup \mathfrak{C}_{i_0}. \tag{5}$$

Операцией элементарного укрупнения клетки ω называется процесс объединения клеток ω и $\mathfrak{C}_{i_0}$; результат этого объединения обозначается ω^+, $\omega^+ = \omega \cup \mathfrak{C}_{i_0}$.

Если у клетки ω имеются соседи во множестве $\widetilde{\mathfrak{C}}$, то клетка ω называется расширяемой, а если у ω не существует соседних клеток во множестве $\widetilde{\mathfrak{C}}$, то эта клетка называется предельной.

Из сказанного следует, что операцию элементарного укрупнения можно применить к клетке, которая имеет соседей во множестве $\widetilde{\mathfrak{C}}$.

Рассмотрим последовательность элементарных расширений, используя знак := для обозначения переименования рассматриваемых переменных.

Начнем с клетки $\mathfrak{C}_0$ исходного подразделения. Соответствующий алгоритм записывается в следующем виде:

0. Полагаем $\omega := \mathfrak{C}_0$, $\widetilde{\mathfrak{C}} := \mathfrak{C}$, $\tilde{J} = J_M$, $\widehat{\mathfrak{C}} := \emptyset$, $\hat{J} := \emptyset$.
1. Если клетка ω расширяема, т.е. у ω существует хотя бы одна соседняя

клетка в $\widetilde{\mathfrak{C}}$, то согласно (4) – (5) находим i_0, ω^+, полагаем $\widetilde{\mathfrak{C}} := \widetilde{\mathfrak{C}} \backslash \mathfrak{C}_{i_0}$,

$\tilde{J} := \tilde{J} \backslash \{i_0\}$, $\widehat{\mathfrak{C}} := \widehat{\mathfrak{C}} \cup \mathfrak{C}_{i_0}$, $\hat{J} := \hat{J} \cup \{i_0\}$, $\omega := \omega^+$ и переходим к началу цикла (т.е. к пункту 1.).

2. В противном случае (а именно, когда ω - предельная клетка, т.е. когда у ω не существует ни одной соседней клетки в $\widetilde{\mathfrak{C}}$) последовательность элементарных расширений закончена.

Из предыдущего видно, что работа описанного алгоритма для связного многообразия заканчивается одной клеткой, которая оказывается предельной. Таким образом, в результате работы алгоритма укрупненное клеточное подразделение $\mathfrak{D}$ связного многообразия $\mathfrak{M}$ состоит из одной клетки $\mathfrak{D}_0 = \cup_{i\in J_m} \mathfrak{C}_i$, и $\widetilde{\mathfrak{C}} = \emptyset$, $\tilde{J} = \emptyset$, $\widehat{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}$, $\hat{J} = J_M$.

Описанный алгоритм является базой более сложного алгоритма, позволяющего учесть некоторые аппроксимативные свойства. Излагаемый далее алгоритм назовем аппроксимационным.

Пусть

$$\varepsilon^* \overset{\text{def}}{=} \max_{i\in I} \phi_f(\mathfrak{C}_i), \qquad \varepsilon^{**} \overset{\text{def}}{=} \phi_f(\mathfrak{M}). \tag{6}$$

Зададимся числом ε из промежутка $(\varepsilon^*, \varepsilon^{**})$,

$$\varepsilon \in (\varepsilon^*, \varepsilon^{**}). \tag{7}$$

В отличие от предыдущего алгоритма, где укрупнение клетки прекращалось исчерпанием всех клеток исходного подразделения, в аппроксимационном алгоритме укрупнение клетки ω может прекратиться раньше. Клетка может оказаться расширяемой, но ее укрупнение прекращается, если выполнено двойное неравенство:

$$\phi_f(\omega) \le \varepsilon \le \phi_f(\omega^+). \tag{8}$$

Неравенство (8) называется -критерием остановки укрупнения. В дальнейшем номера таких клеток, удовлетворяющих критерию (8), накапливаются в множестве J^0, а номера предельных клеток накапливаются в множестве J^1. Сначала оба множества считаются пустыми.

Приступим к описанию этого алгоритма.

АЛГОРИТМ *(A)*

0. Полагаем $\widetilde{J} := J_M, j := 0, j := 0$ (таким образом, полагаем $\widetilde{\mathfrak{C}} := \mathfrak{C}, \widehat{\mathfrak{C}} = \emptyset,\ \widehat{J} = \emptyset, J^0 := \emptyset, J^1 := \emptyset$.

1. Определяем $i_0 := \min_{i \in \widetilde{J}}\{i\}$.

2. Присваиваем $\omega := \mathfrak{C}_{i_0}$ (таким образом, полагаем $\widetilde{J} := \widetilde{J} \setminus \{i_0\}$, $\hat{J} := \hat{J} \cup \{i_0\}$, $\widetilde{\mathfrak{C}} := \widetilde{\mathfrak{C}} \setminus \widetilde{\mathfrak{C}_{\iota_0}}$, $\widehat{\mathfrak{C}} := \widehat{\mathfrak{C}} \cup \widehat{\mathfrak{C}_{\iota_0}}$; в начале работы алгоритма имеем $i_0 = 0, \omega := \mathfrak{C}_0$).

3. Анализируем клетку ω: расширяемая она или предельная.

3.0. Если ω расширяемая, то заново находим i_0 (см. (4) – (5)) и определяем ω^+.

3.0.0. Если выполнено (8), то увеличиваем множество J^0 номеров остановленных расширяемых клеток, $J^0 := J^0 \cup \{j\}$ и идем к 4.

3.0.1. Если не выполнено (8), то полагаем $\omega := \omega^+$, $\widetilde{J} := \widetilde{J} \setminus \{i_0\}$, $\hat{J} := \hat{J} \cup \{i_0\}$, $\widetilde{\mathfrak{C}} := \widetilde{\mathfrak{C}} \setminus \mathfrak{C}_{i_0}$, $\widehat{\mathfrak{C}} := \widehat{\mathfrak{C}} \cup \mathfrak{C}_{i_0}$, и идем к 3.

3.1. Если ω предельная, то находим $J^1 := J^1 \cup \{j\}$ и идем к 4.

4. Делаем присваивания $\mathfrak{D}_j := \omega$; $j := j + 1$; и используем (определенный ранее) тип клетки ω и (найденное ранее) число i_0.

4.0. Если ω - расширяемая клетка, то идем к 2 (еще раз подчеркнем, что число i_0 нам известно).

4.1. Если ω - предельная клетка, то выясняем, пусто ли $\widetilde{J}$.

4.1.0. Если $\widetilde{J} \neq \emptyset$ (т.е. $\widetilde{J}$ не пусто), то идем к 1.

4.1.1. Если $\widetilde{J} = \emptyset$ (т.е. $\widetilde{J}$ пусто), то идем к 5.

5. END (конец работы алгоритма).

Полученное укрупнение обозначим $\mathfrak{D}(\mathrm{f}, \varepsilon) = \{\mathfrak{D}_j | \mathrm{j} \in J_K\}$, где $K = |J^0| + |J^1|, J_K = J^0 \cup J^1$.

В соответствии с изложенным алгоритмом выполнены следующие свойства:

1) для клеток $\mathfrak{D}_j$ j с индексами из множества J^0 выполнено неравенство:

$$\phi_f(\mathfrak{D}_j) \le \varepsilon \le \phi_f(\mathfrak{D}_j{}^+) \quad \forall \mathrm{j} \in J^0 . \tag{9}$$

2) для клеток $\mathfrak{D}_j$ j с индексами из множества J^0 выполнено неравенство:

$$\phi_f(\mathfrak{D}_j) \le \varepsilon. \tag{10}$$

Определение 2. *Клеточное подразделение $\mathfrak{D}$ со свойствами (9) –(10) называется адаптивным укрупнением, определяемым тройкой $(\mathfrak{C}, f, \varepsilon)$.*

Таким образом справедливо следующее утверждение

Теорема 1. *При выполнении условий (6) – (7) адаптивное подразделение, определяемое тройкой $(\mathfrak{C}, f, \varepsilon)$ реализуемо и однозначно определено. При этом множество клеток, удовлетворяющих условию (9) не пусто,*

$$J^0 \neq 0. \tag{11}$$

Доказательство. Однозначная определенность адаптивного подразделения вытекает из однозначности алгоритма (A). Для доказательства реализуемости заметим, что работа алгоритма начинается с клетки $\mathfrak{C}_0$. Ввиду предположений (6) – (7) справедливо неравенство $\phi_f(\mathfrak{C}_0) \le \varepsilon < \phi_f(\mathfrak{M})$. Благодаря свойству монотонности функции ϕ_f последовательное укрупнение этой клетки заведомо приведет к ситуации, когда результат ω такого укрупнения еще будет удовлетворять условию $\phi_f(\omega) \le \varepsilon$, а последовательное добавление очередной клетки $\mathfrak{C}_{i_0}$исходного подразделения $\mathfrak{C}$ приведет к расширению $\omega^+ = \omega \cup \mathfrak{C}_{i_0}$, для которого справедливо неравенство $\varepsilon < \phi_f(\omega^+)$. Итак, реализуемость алгоритма и соотношение (11) доказаны. Теорема доказана.

Замечание 1. При $\mathrm{n} = 1$ *алгоритм (A) превращается в алгоритм, описанный в работе [28].*

3. Обобщенные пространства Хаара и их вложенность

Пусть $U(\mathfrak{M})$ - множество вещественно-значных функций, заданных в каждой точке многообразия $\mathfrak{M}$, и пусть $\varphi \in U(\mathfrak{M})$.

Используя клеточное подразделение $\mathfrak{C}$ многообразия $\mathfrak{M}$ введем функции $\omega_i(t), t \in \mathfrak{M}, i \in J_M$, формулой:

$$\omega_i(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{при } t \in \mathfrak{C}_i, \\ 0 \text{ при } t \in \mathfrak{C} \backslash \mathfrak{C}_i. \end{cases} \tag{12}$$

Система $\{\omega_i(t)\}_{i \in J_M}$ функций (12) определяется клеточным подразделением $\mathfrak{C}$ и функцией φ.

Обозначая $supp_{\ i}\, \varphi$ множество точек клетки $\mathfrak{C}_i$, в которых функция $\varphi(t)$ отлична от нуля, предположим что

$$supp_{\ i}\, \varphi \neq \emptyset \qquad \forall\ i \in J_M. \tag{13}$$

При условии (13) система $\{\omega_i(t)\}_{i \in J_M}$ линейно независимая.

Линейное пространство $\mathbb{S}_0(\mathfrak{C}, \varphi)$, определяемое соотношением:

$$\mathbb{S}_0(\mathfrak{C}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\{\tilde{u}(t) | \tilde{u}(t) = \textstyle\sum_{i \in J_M} c_i\ \omega_i(t), \quad \forall\, c_i \in \mathbb{R}^1\} \tag{14}$$

называется обобщенным пространством Хаара на клеточном подразделении $\mathfrak{C}$, а элементы этого пространства — сплайнами нулевого порядка. Символ Cl_p в (14) означает замыкание в топологии поточечной сходимости. Функции $\omega_i(t)$ называются координатными сплайнами нулевого порядка.

Задание подразделения $\mathfrak{C}$ и функции $\varphi(t)$ однозначно определяет пространство $\mathbb{S}_0(\mathfrak{C}, \varphi)$.

Рассмотрим систему точек $\{\xi_i\}_{i \in J_M}$ на $\mathfrak{M}$ со свойством $\xi_i \in supp_{\ i}\, \varphi$ и для любой функции $u \in U(\mathfrak{M})$ положим

$$l_i\,(u) = u(\xi_i)/\varphi(\xi_i) \qquad \forall\ i \in J_M. \tag{15}$$

Ясно, что $\{l_i\}_{i \in J_M}$ - система линейных функционалов, определенных на линейном пространстве $U(\mathfrak{M})$. Легко видеть, что эта система биортогональна системе функций $\{\omega_i\}_{i \in J_M}$,

$$l_i(\omega_{i'}) = \delta_{i,i'}. \tag{16}$$

Пусть клеточное подразделение $\mathfrak{D}$ является укрупнением клеточного подразделения $\mathfrak{C}$ (см. предыдущий пункт).

При $j \in J_K$ рассмотрим функции

$$\Omega_j(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{при } t \in \mathfrak{D}_j, \\ 0 \text{ при } t \in \mathfrak{D} \backslash \mathfrak{D}_j. \end{cases} \tag{17}$$

Легко видеть, что при условии (13) система $\{\Omega_j(t)\}_{j \in J_K}$ является линейно независимой системой.

Линейное пространство $\mathbb{S}_0(\mathfrak{D}, \varphi)$ определяется соотношением:

$$\mathbb{S}_0(\mathfrak{D}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\{\widetilde{U}(t) | \widetilde{U}(t) = \textstyle\sum_{j \in J_K} c_j\ \Omega_j(t), \quad \forall\, c_j \in \mathbb{R}^1\} \tag{18}$$

и является обобщенным пространством Хаара на клеточном подразделении $\mathfrak{D}$.

Теорема 2. *Координатные функции $\Omega_j(t)$ пространства $\mathbb{S}_0(\mathfrak{D}, \varphi)$ выражаются через координатные функции $\omega_i(t)$ пространства $\mathbb{S}_0(\mathfrak{C}, \varphi)$ с помощью соотношения*

$$\Omega_j(t) = \textstyle\sum_{\xi_i \in \mathfrak{D}_j} l_i\,(\Omega_j)\,\omega_i(t). \tag{19}$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим представления координатных функций (12) и (17), воспользуемся тем, что клеточное подразделение $\mathfrak{D}$ является укрупнением подразделения $\mathfrak{C}$ и применим систему функционалов (15), учитывая свойство биортогональности (16).

Соотношение (19) называется калибровочным соотношением.

Из (15) следует, что эквивалентная запись этого соотношения такова:

$$\Omega_j(t) = \textstyle\sum_{\xi_i \in \mathfrak{D}_j} \Omega_j(\xi_i)\omega_i(t)/\omega_j(\xi_i). \tag{20}$$

Следствие 1. Подпространство $\mathbb{S}_0(\mathfrak{D}, \varphi)$ является подпространством пространства $\mathbb{S}_0(\mathfrak{C}, \varphi)$.

Это следствие вытекает из соотношения (20).

Список литературы

1. Бурова И.Г., Демьянович Ю.К., Евдокимова Т.О.. Сплайн-всплески и их реализация. СПб. Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2017
2. Демьянович Ю.К., Михлин С.Г.. О сеточной аппроксимации функций соболевских классов //Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР, 35, 1973. С.6-11.
3. Демьянович, Аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны, СПб., Изд-во СПбГУ. 1994.
4. Демьянович Ю.К.. Вэйвлеты на многообразии// Доклады РАН. 2009.Т. 421, №2. С. 1-5.
5. Ю.К. Демьянович. Всплесковые разложения в пространствах сплайнов на неравномерной сетке //Доклады РАН. 2002. Т. 382. № 3. С. 313-316.

6. Демьянович Ю.К.. Калибровочное соотношение для B-сплайнов на неравномерной сетке// Матем. модел. Т.13. № 9. 2001. С. 98-100.
7. Демьянович Ю.К.. Минимальне сплайны лагранжева типа// Проблемы математического анализа 2010. Вып. 50. С.89-100.
8. Демьянович Ю.К., Теория сплайн-всплесков, СПб., 2013.
9. Демьянович Ю.К., Зимин А.В.. Аппроксимации курантова типа и их вэйвлетные разложения// Проблемы математического анализа, 2008. Т.37, С.3-22.
10. Демьянович Ю.К., Иванцова О.Н., Пономарева А.Ю.. Целочисленная реализация сплайн-всплескового разложения// Сб. Проблемы математического анализа, Т.90, 2017. С. 35-48.
11. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн функций. М., 1980. 352 с.
12. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов.-М.: Мир, 2005. С. 671.
13. Михлин. Вариационно-сеточная аппроксимация// Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР, 48, 1974. С.32-186.
14. Михлин С.Г. Проблема минимума квадратичного функционала. ГТТИ, 1962.
15. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. "Наука", гл. Ред.физ.мат. л-ры. 1968.
16. Михлин С.Г. О координатных функциях вариационно-разностного метода// ДАН СССР, №3, 1971. С.526-529.
17. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М. 2005. С. 616.
18. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М., 1976. С. 248.
19. Чуи К. Введение в вэйвлеты. М., 2001. С. 412.
20. Courant R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations// Bulletin of the American Mathematical Society 49, 1943. P. 1–23.
21. Daubechies I., Guskov I., Sweldens W. Commutation for Irregular Subdivision//Const. Approx., 17(4), 2001. pp.479-514.
22. Daubechies I.. Ten Lectures on Wavelts// SIAM/ Philadelphia. 1992.
23. Dai K.Y., Liu G.R., Free and forced vibration analysis using the smoothed finite element method (SFEM)// Journal of Sound and Vibration 301, 2007. P. 803-820.
24. Dem'yanovich Y.K., Romanovskii L.M.. Spline-Wavelet Coarsening of Courant-Type Approximations// Journal of Mathematical Sciences (United States), 199 (4), 2014. P. 414-431.
25. Dem'yanovich Y.K., Gerasimov I.V.. Local Coarsening of Simplicial Subdivisions// J.of Math. Sci. 2016. Vol.216, No.2, P. 219-236.
26. Demyanovich Yu.K.. Spline Approximations on Manifolds// International Journal of Wavelets. Multiresolution and Information Processing. Vol. 4, No. 3,2006, P. 383-403.
27. Demyanovich Yu.K., Zimin A.V.. Wavelet decompositions on a manifold//Journal of Mathematical Sciences, 2008. Vol.150, issue 2. P.1929-1936
28. Demyanovich Yu.K., Ponomareva A.Yu.. Adaptive Spline-Wavelet Processing of a Discret Flow// J.of Math. Sci. 2015 Vol.210. No.4, P. 371-390.
29. Michlin S.G., Approximation auf dem Kubischen Gitter, Berlin, 1970.
30. Nguyen-Thoi T., Liu G.R., Nguyen-Xuan H., et al. Adaptive analysis using the node-based smoothed finite element method (NS-FEM)// International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering 27, Issue: 2, 2011. pp. 198-218.
31. Schoenberg I. J. Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions // Quart. Appl. Math. 1946. Vol. 4. P. 45–99, 112–141.
32. Strang G., Fix G. Fourier Analysis of the finite element method in Ritz –Galerkin Theory // Stud. Appl. Math. 1969. Vol. 48. N. 3. P. 265–273.
33. Zhang Z.Q., Liu G.R., Upper and lower bounds for natural frequencies: A property of the smoothed finite element methods// International Journal for Numerical Methods in Engineering 84, Issue: 2, 2010. P. 149-178.

СЕКЦИЯ №8.
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.09)

МЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.00)

СЕКЦИЯ №9.
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.01)

СЕКЦИЯ №10.
МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.04)

СЕКЦИЯ №11.
МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.05)

СЕКЦИЯ №12.
ДИНАМИКА, ПРОЧНОСТЬ МАШИН, ПРИБОРОВ И АППАРАТУРЫ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.06)

СЕКЦИЯ №13.
БИОМЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.08)

АСТРОНОМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.00)

СЕКЦИЯ №14.
АСТРОМЕТРИЯ И НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.01)

СЕКЦИЯ №15.
АСТРОФИЗИКА И ЗВЕЗДНАЯ АСТРОНОМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.02)

СЕКЦИЯ №16.
ФИЗИКА СОЛНЦА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.03)

СЕКЦИЯ №17.
ПЛАНЕТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.04)

ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.00)

СЕКЦИЯ №18.
ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.01)

СЕКЦИЯ №19.
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.02)

СЕКЦИЯ №20.
РАДИОФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.03)

СЕКЦИЯ №21.
ФИЗИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.04)

СЕКЦИЯ №22.
ОПТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.05)

СЕКЦИЯ №23.
АКУСТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.06)

СЕКЦИЯ №24.
ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.07)

СЕКЦИЯ №25.
ФИЗИКА ПЛАЗМЫ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.08)

СЕКЦИЯ №26.
ФИЗИКА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.09)

СЕКЦИЯ №27.
ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.10)

СЕКЦИЯ №28.
ФИЗИКА МАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.11)

СЕКЦИЯ №29.
ЭЛЕКТРОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.13)

СЕКЦИЯ №30.
ТЕПЛОФИЗИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ТЕПЛОТЕХНИКА
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.14)

СЕКЦИЯ №31.
ФИЗИКА И ТЕХНОЛОГИЯ НАНОСТРУКТУР,
АТОМНАЯ И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.15)

СЕКЦИЯ №32.
ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.16)

СЕКЦИЯ №33.
ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ГОРЕНИЕ И ВЗРЫВ, ФИЗИКА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ВЕЩЕСТВА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.17)

СЕКЦИЯ №34.
КРИСТАЛЛОГРАФИЯ, ФИЗИКА КРИСТАЛЛОВ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.18)

СЕКЦИЯ №35.
ФИЗИКА ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ И УСКОРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.20)

СЕКЦИЯ №36.
ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.21)

СЕКЦИЯ №37.
ФИЗИКА ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.23)

ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.00)

СЕКЦИЯ №38.
НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.01)

СЕКЦИЯ №39.
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.02)

СЕКЦИЯ №40.
ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.03)

СЕКЦИЯ №41.
ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.04)

СЕКЦИЯ №42.
ЭЛЕКТРОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.05)

СЕКЦИЯ №43.
ВЫСОКОМОЛЕКУЛЯРНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.06)

СЕКЦИЯ №44.
ХИМИЯ ЭЛЕМЕНТООРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.08)

СЕКЦИЯ №45.
ХИМИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.09)

СЕКЦИЯ №46.
БИООРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.10)

СЕКЦИЯ №47.
КОЛЛОИДНАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.11)

СЕКЦИЯ №48.
БИОНЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.12)

СЕКЦИЯ №49.
НЕФТЕХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.13)

СЕКЦИЯ №50.
РАДИОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.14)

СЕКЦИЯ №51.
КИНЕТИКА И КАТАЛИЗ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.15)

СЕКЦИЯ №52.
МЕДИЦИНСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.16)

СЕКЦИЯ №53.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ХИМИЯ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.17)

СЕКЦИЯ №54.
ХИМИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.21)

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.00.00)

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ БИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.00)

СЕКЦИЯ №55.
РАДИОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.01)

СЕКЦИЯ №56.
БИОФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.02)

СЕКЦИЯ №57.
МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.03)

СЕКЦИЯ №58.
БИОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.04)

СЕКЦИЯ №59.
ФИЗИОЛОГИЯ И БИОХИМИЯ РАСТЕНИЙ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.05)

СЕКЦИЯ №60.
БИОТЕХНОЛОГИЯ (В ТОМ ЧИСЛЕ БИОНАНОТЕХНОЛОГИИ) (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.06)

СЕКЦИЯ №61.
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ГЕНЕТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.07)

СЕКЦИЯ №62.
БИОИНЖЕНЕРИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.08)

СЕКЦИЯ №63.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИОЛОГИЯ, БИОИНФОРМАТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.09)

ОБЩАЯ БИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.00)

СЕКЦИЯ № 64
БОТАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.01)

СЕКЦИЯ №65.
ВИРУСОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.02)

СЕКЦИЯ №66.
МИКРОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.03)

СЕКЦИЯ №67.
ЗООЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.04)

СЕКЦИЯ №68.
ЭНТОМОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.05)

СЕКЦИЯ №69.
ИХТИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.06)

СЕКЦИЯ №70.
ГЕНЕТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.07)

СЕКЦИЯ №71.
ЭКОЛОГИЯ (ПО ОТРАСЛЯМ) (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.08)

СЕКЦИЯ №71.1.
ПЛОДОВОДСТВО, ВИНОГРАДАРСТВО

ПРИРОДОСОГЛАСОВАННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В САДОВОДСТВЕ

Андрусенко[1] С.Ф., Аполохов[2] Ф.Ф., Ермоленко[2] В.Г.

[1]кафедра биомедицины и физиологии института живых систем, ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет», г. Ставрополь;

[2]Опытная Станция по Садоводству Северо-Кавказского Зонального НИИ Садоводства и Виноградорства, Ставропольская, ГНУ, Ставропольский край, Георгиевский район, поселок Ореховая Роща

Возрастающее влияние экологии на производство плодово-ягодной продукции соответствующей здоровому питанию человека, применение гибких технологий не только в высоко товарном производстве, но « особенно» актуально для средних и мелких садов. Успех хозяйственной деятельности человека при выращивании плодовых деревьев базируется в первую очередь на стимуляции высокой активности фотосинтезирующих органов, а также метаболизма и поставок элементов почвенного питания для роста и развития частей растения [2].

Обсуждение проблем последствий техногенного воздействия на природу доказывают, что каждые 20-30 лет аграриям необходимо менять до 50% основных слагаемых технологий. Давайте сравним систему ведения садоводства с 50-х по 90-е годы 20 века. Сортосмена почти полная, средства механизации новые, площади питания и формировки крон подвергались как минимум четырёхкратной модернизации, ассортимент и средства защиты пополнялись почти ежегодно, в теории и на практике минерального питания, почвозащите, рациональной профилактике также присутствуют существенные новации.

Наиболее консервативной стороной плодоводства 21 века является нормирование и уборка урожая, поддержание физиологического равновесия деревьев, большая зависимость от природных факторов абиотического характера. В суммарном выражении на обрезку крон, уборку урожая приходится до 60-90 % трудозатрат, а частота потерь от засухи, обледенения, градобоев, заморозков и других явлений в каждом десятилетии растут многократно.

Эти заботы во многом помогают решать селекционные достижения, направленные на развитие иммунитета, холодостойкости, скороплодности и т.д.

К примеру, выведение сортов яблонь и груш с генетическим происхождениями: колоновидными кронами, короткими междоузлиями, с широкими листьями, развитой паренхимой и прочной кутикулой обеспечивает удвоение продуктивности фотосинтеза, хорошую несущую способность кроны и в 4-5 раз уменьшает повреждение плодов градом средней интенсивности. В сочетании с ретардантами, анти депрессантами, микроэлементами обеспечивает стабильный рост и крепость клеточных стенок, что способствует повышению товарности плодов, траспортабельности длительности хранения.

Фото 1 – Колоновидный сад яблони

Защите от градобоя сада, конечно, необходимо уделять внимание на стадии проектирования выбора места, подбора сортов, реализации технологий производства.

В целом биологическая и фитосанитарная защита во много раз дешевле ныне практикуемых садов интенсивного типа. Справедливо заметить, что специальные инженерные сооружения (шпалерные опоры, градоулавливающие сети, артиллерийские снаряды и т.д.) в десятки раз снижают экономические потери высокоинтенсивных культур. К примеру стоимость урожая в 100т/га зимних яблок превышает 3 млн рублей, а годовая стоимость защиты 150тыс.рубл./ га.

Капиталоёмко? – Да! Экономически выгодно? – Бесспорно.

Значительно масштабнее всем садам причиняют вред зимне-весенние аномалии тепла и холода. Периодичность этого стихийного явления 12-15 лет, а заморозки весеннего этапа вегетации случаются 4-5 раз из каждых 10 лет [3].

При массовой гибели садов в Средней полосе России и Северном Кавказе с 1928 по 1994 год (66 лет) сады повреждались низкими температурами 13 раз.

Весной 2020 г потери урожая в Ставропольском крае заморозками при температуре минус 3 °С - минус 11 °С уничтожили более 80% текущего урожая плодов и ягод.

Необходимо отметить, что по времени они пришлись на фенофазу бутонизации и начало цветения садов. Потеряно порядка 160 тысяч тонн плодов, ориентировочно на сумму более 90 млрд. рублей. Попытки спасения посредством дымления, поливов, укутывания, спанболдом оказались малоэффективными.

В опытах Ставропольской опытной станции по садоводству затенение деревьев вначале вегетационного периода задержало сроки бутонизации и цветения абрикоса, персика, черешни, сливы и груши на 7-13 дней. Количество цветков, завязавших плоды (полезная завязь) увеличилось с 7 % у черешни и у персика до 25 %.

Таким образом, управление сроками прохождения особо опасных фенофаз развития может гарантировать получение реального урожая плодов. Подобный подход к особенностям агротехники в условиях аномальной погоды называют «природосогласованным».

Природосогласованные технологии требуют учета и прогнозирования очень большого количества агротехнических и биотических элементов привязанных к конкретным микрозонам и погодным условиям [3].

Задача специалистов в области ведения органического земледелия добиться устойчивости безопасных для плодовых культур биогеоценозов. Основная подсистема – фитоценоз через совокупность положительных и обратно – отрицательных связей модифицирует подчиненные компоненты [1].

Главное звено подчиненных компонентов системы – насекомые фитофаги определяет устойчивость всей экосистемы. В эволюции растений и фитофагов формируется биосферный баланс между растительностью и консульментами**.**

На практике фитофаги не могут продолжительно воспроизводиться при монокультуре. Среда питания важна и паразитирующих видов и их хищников. Необходимо осуществлять комплекс мер способствующих успешной адаптации системы агроценозов в системе ландшафтного земледелия с наиболее полным раскрытием потенциальных возможностей самих культурных растений противостоять природным эпидемиям на генетическом, организменном, популяционном и видовом уровнях.

В Центральном Предкавказье на плодовых растениях выявлено более 200 видов вредителей и патогенов. Значение повреждений в значительной степени меняется от микрозон, агрофона сада, сбалансированности фитоценоза в предыдущие годы.

Пятнадцатилетний опыт дифференцированного выращивания черешни на холмистых склонах горы Стрижамент подтверждает, что биологические инсектициды и фунгициды могут с успехом заменить химические средства защиты на фоне парасидерального содержания почвы в саду (табл. 1).

Таблица 1 – Влияние ландшафта и агрофонов на товарность плодоношения черешни «Этокская красавица» 15 летнего возраста

Годы	Средства защиты			Контроль без защиты и удобрений
	Бордосская жидкость, Хорус, Скор, фуфанол	Хорус, бактофит, лепидоцид	Бактофит, лепидоцид	
Южный склон 1-3 % - черный пар				
2015	49,5	45,6	54,2	-
2016	66,6	68,4	68,6	-

2017	75,4	76,3	70,6	-
2019	84,6	78,1	77,3	-
2020	69,3	70,5	72,4	-
Средн.	72,4	67,6	68,4	-
Юго-восточный склон 6паросидераты % - пароседераты				
2015	52,8	50,1	55,4	-
2016	80,8	76,7	79,7	-
2017	82,4	85,0	85,8	-
2019	86,2	84,9	8/3,6	-
2020	70,7	68,3	79,5	-
Средн.	72,6	73,0	76,8	-
Северо-западный склон 15% - бессрочное залужение - сенокошение				
2015	-	86,9	92,7	90,4
2016	-	95,2	96,0	84,9
2017	-	88,6	84,1	87,5
2019	-	90,3	85,2	88,8
2020	-	76,4	80,1	82,6
Средн.	-	87,5	88,0	86,6

Применение черного пара несколько увеличивает эффективность химических фунгицидов и инсектицидов на позднесозревающих сортах. Интегрированное применение фунгицидов химического синтеза и биологических средств более безопасно для окружающей среды и человека и имеет многолетний эффект.

Фото 2 – Плодоношение черешни при бессрочном залужении

Снижение качества плодов от растрескивания кожицы, пораженной вишневой мухой, градобоев и плодовой гнилью менее заметно у ранних сортов черешни. Средние и поздние сорта на Ставрополье страдают от этих недугов сильнее.

Черешня, выращиваемая на крутых склонах холма с хорошим воздушным дренажем и целинно-степной растительностью, ежегодно убираемой на сено. Отличалась высокой товарностью плодов и отличными вкусовыми качествами, в том числе без дополнительного применения средств защиты и удобрения. В некоторых микрозонах эта технология самая перспективная.

Фото 3 – Сидераты в черешневом саду

Вероятно и себестоимость плодов ниже. Размер ежегодных приростов побегов в этом варианте был слабее в 2-3 раза, чем на черном паре или паросидератах в междурядьях. В итоге за 15 лет жизни размеры крон в залужённом саду были в 3-4 раза меньше. Общая масса плодов на этих деревьях составляли 8-10 кг/дерева, а на паровом фоне 16-28 кг/дерева.

При условии полива и минеральных подкормках размеры деревьев и величина урожая не отличались от других вариантов.

Вероятно, эти факторы интенсификации экономически оправданы.

Фото 4 – Урожай в саду, с учетом факторов интенсификации

Экологические преимущества залуженных садов черешни при этом не теряются. Особенно наглядно такое проявление в местах выхода родниковых вод и источников.

Преимущество природосогласованных технологий полезно и человеку и окружающей среде.

В последние годы значительно возросла роль средств защиты биологического происхождения, например препарат «Касумин» системный бактериальный фунгицид лечебного действия (антибиотик), самый эффективный из известных препаратов из бактериозов на яблоне, груше, вишни.

Препараты Новосибирского завода «Сиббиофарм» - «Азолен», «Бактофик», «Битоксибацилин», «Липидоцид» способны подавлять развитие грибных болезней и вредителей без отрицательных последствий для пчел, полезной фауны и человека. Они не обладают фитотоксичностью, очень короткие сроки ожидания для посещения садов людьми и потребления плодов. Многие садоводы отмечают усиление окраски плодов, ускорения созревания и лежкости урожая, т.е. препараты обладают стимулирующим действием. Стоимость защиты яблони в ООО «Интеринвест» Ставропольского края составила в 2019 составила 112532 руб. с применением химического стандарта и 89962 руб. с использованием новых биопрепаратов не подавляющих энтомофагов и активных почвенных биотов. Урожай плодов по качеству и экономическому результату превысил стандарты.

Заключение

Применение биологической защиты бережет природу и экономит затраты, но требует больше знаний предмета и детального оперативного прогнозирования результатов многофакторных взаимосвязей.

Список литературы

1. Алтухов Ю.П. Генетические процессы в популяциях. Учебное пособие. – М. Академкнига, 2003 – 431 с.

2. Андрусенко С.Ф., Аполохов Ф.Ф. Монокультура - причина почвоутомления, способы преодоления // Биоразнообразие, биоресурсы, вопросы биотехнологии и здоровье населения Северо-Кавказского региона: Материалы VII (64-й) ежегодной научно-практической конференции «Университетская наука – региону» Северо-Кавказского федерального университета. – Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2019. – 382 с.

3. Грязев В.А. Выращивание саженцев для высокопродуктивных садов. /В.А. Грязев - Ставрополь «Кавказский край» 1999, – С. 47–98.

4. Якуба Г.В., Сторчевая Е.М., Подгорная М.Е. // Оптимизация фитосанитарного состояния садов в условиях погодных стрессов / Сев.-Кавк. зон. науч.-исслед. ин-т садоводства и виноградарства Россельхозакадемии, Краснодар, 2005. – С. 338-343.

СЕКЦИЯ №72.
БИОГЕОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.09)

СЕКЦИЯ №73.
ГИДРОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.10)

СЕКЦИЯ №74.
ПАРАЗИТОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.11)

СЕКЦИЯ №75.
МИКОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.12)

СЕКЦИЯ №76.
ПОЧВОВЕДЕНИЕ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.13)

СЕКЦИЯ №77.
БИОЛОГИЧЕСКИЕ РЕСУРСЫ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.14)

ФИЗИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.00)

СЕКЦИЯ №78.
ФИЗИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.01)

СЕКЦИЯ №79.
АНТРОПОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.02)

СЕКЦИЯ №80.
ИММУНОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.03)

СЕКЦИЯ №81.
КЛЕТОЧНАЯ БИОЛОГИЯ, ЦИТОЛОГИЯ, ГИСТОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.04)

СЕКЦИЯ №82.
БИОЛОГИЯ РАЗВИТИЯ, ЭМБРИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.05)

СЕКЦИЯ №83.
НЕЙРОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.06)

ГЕОГРАФИЯ

СЕКЦИЯ №84.
ФИЗИЧЕСКАЯ ГЕОГРАФИЯ И БИОГЕОГРАФИЯ, ГЕОГРАФИЯ ПОЧВ И ГЕОХИМИЯ ЛАНДШАФТОВ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 25.00.23)

СЕКЦИЯ №85.
ЭКОНОМИЧЕСКАЯ, СОЦИАЛЬНАЯ, ПОЛИТИЧЕСКАЯ И РЕКРЕАЦИОННАЯ ГЕОГРАФИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 25.00.24)

СЕКЦИЯ №86.
ГЕОМОРФОЛОГИЯ И ЭВОЛЮЦИОННАЯ ГЕОГРАФИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 25.00.25)

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

СЕКЦИЯ №87.
ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

ОПЕРАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ, ОШИБКИ ПРИ ЗАПУСКЕ И ИХ УСТРАНЕНИЕ

Велиев Р.Н., Гусейн А.С.

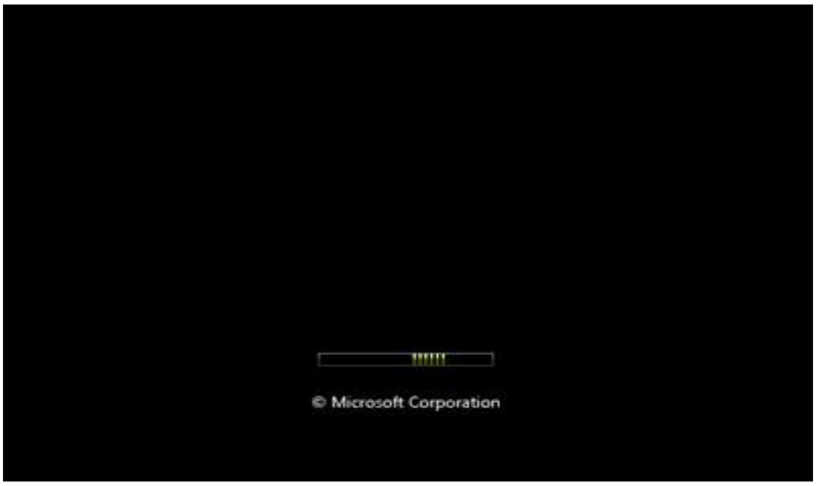
Азербайджанский Технологический Университет, г. Гянджа

В настоящее время невозможно представить работу компьютера без программного обеспечения. Как мы знаем, по функциональности можно выделить системное ПО и прикладное ПО. Системное программное обеспечение в основном организует процесс обработки информации. Системные ПО подразделяются на: операционные системы, сетевые системы, сервисные приложения и т.д.

Операционная система — это самое важное программное обеспечение, которое работает на компьютере. Без операционной системы компьютер бесполезен. ОС управляет памятью и всем программным и аппаратным обеспечением. Говоря своими словами, операционная система — это мост между компьютером и человеком.

Под фразами «Загрузка компьютера» (loading), «Загрузка операционной системы» (loading OS) понимается процесс, который происходит при нажатии на кнопку включения компьютера (power). Во время этого процесса, который занимает приблизительно минуту, компьютер выполняет несколько важных функций:

- Проверяет все программы, чтобы убедится, что все они работают правильно;
- Проверяет наличие нового оборудования;
- Далее запускается операционная система.



После включении компьютера ОС раньше всех программ загружается в оперативную память и создает сферу для работы других программ.

Функции операционной системы

Основные функции операционных систем следующие:

- Управляет вычислительными процессами и ресурсами компьютера: дисками, памятью, принтером и так далее
- Является посредником (создает взаимодействие) между компьютером и пользователем
- Поддерживает пользовательский интерфейс
- Переносит программы с другого вида памяти в операционную память
- Управляет оперативной памятью

Как только операционная система запустилась, она управляет всем программным и аппаратным обеспечением компьютера.

Виды Операционных систем

Операционные системы предварительно устанавливаются на любой компьютер, который мы покупаем.

Существуют три наиболее популярных операционных систем для компьютеров: Microsoft Windows, Apple Mac Os X и Linux.

Компания Microsoft выпустила в продажу операционную систему **Windows** в 1985 ом году. В конце 1980 - ых были созданы много программ которые работали в среде Windows. Более популярной Windows стала после того как компания Microsoft выпустила программы пакета Microsoft Office, которые работали на данной платформе. За последующие годы были выпущены много версий Windows, но наиболее популярными из них в разные времена стали Windows 10 (выпущен в 2015 году), Windows 8 (2012), Windows 7 (2009), и Windows XP (2001). Windows поставляется предустановленной на большинстве новых компьютерах, и является самой популярной операционной системой в мире.

Mac OS представляет собой линейку операционных систем, созданных компанией Apple. Mac OS поставляется предустановленной на всех новых компьютерах Macintosh или Mac.

Linux — семейка операционных систем с открытым исходным кодом. Это значит, они могут модифицироваться и распространятся любым человеком по всему миру. Именно эта особенность отличает ее от других, таких как Windows, которая может изменяться и распространяться только самим владельцем (Microsoft). Преимущества Линукса в том, что он бесплатный, также преимуществом является то что, есть много различных версий Линукса на выбор. Каждая версия имеет свой внешний вид, и самые популярные из них это Ubuntu, Mint и Fedora.

Операционные системы для мобильных устройств

Все операционные системы, о которых мы говорили выше разработаны для настольных и портативных компьютеров, таких как ноутбук или ПК. Есть операционные системы, которые разработаны специально для мобильных устройств, таких как телефоны, смартфоны, планшетные компьютеры например, Apple, IOS, Windows Phone и Android.

По функциональности они уступают компьютерным операционным системам, но все же они способны выполнить множество основных задач. Например, просмотр фильмов, просмотр веб-страниц в интернете, запуск приложений, игр и т.д.

Основная функция всех операционных систем — посредническая. Она заключаются в обеспечении нескольких видов интерфейса:

- интерфейса между пользователем и программно-аппаратными средствами компьютера (интерфейс пользователя);
- интерфейса между программным и аппаратным обеспечением (аппаратно-программный интерфейс);
- интерфейса между разными видами программного обеспечения (программный интерфейс).

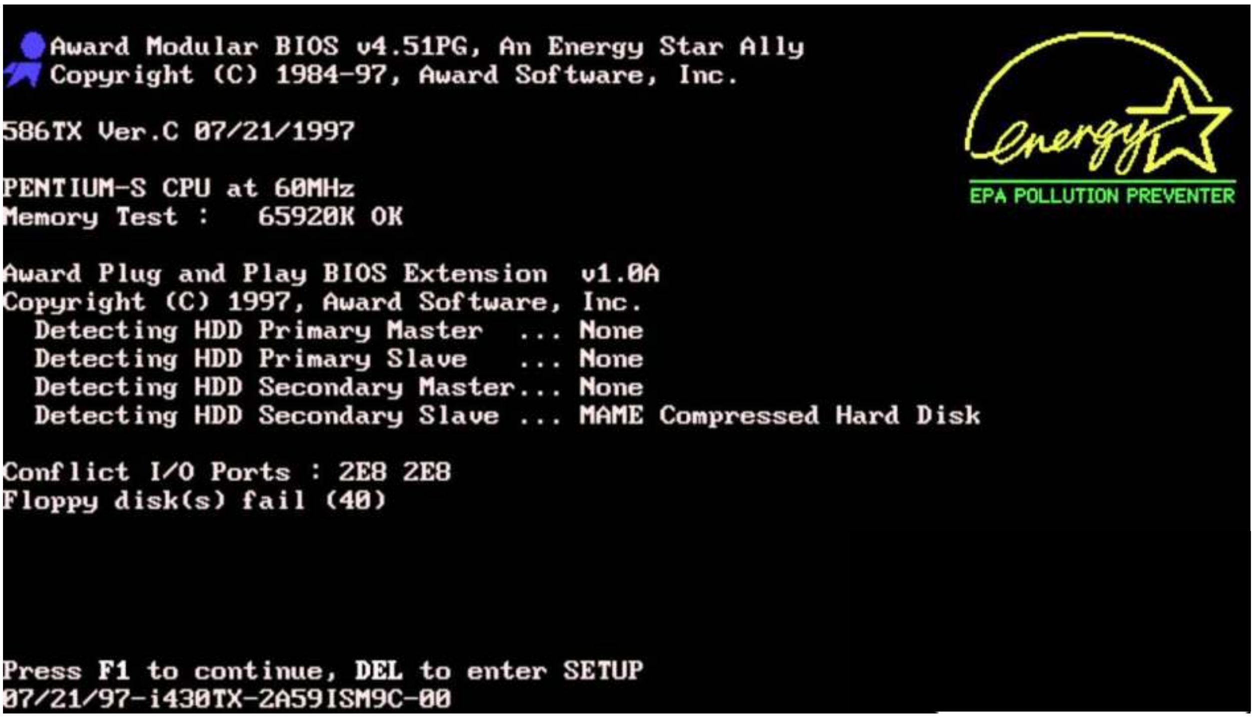
Сетевая операционная система (англ. Network operating system) –операционная система, которая обеспечивает обработку, хранение и передачу данных в сети. Главными задачами сетевой ОС являются разделение ресурсов сети и администрирование сети. Примерами сетевых операционных систем являются Windows NT, Windows 2000, Unix, Linux и др.

По статистике на апрель 2020 года эксплуатация ОС для компьютеров выражена ниже:

Операционные системы, компьютер, мир (апр 2020)	%
Windows	76,58
OS X	18,93
Linux	1,62
Chrome OS	1,1
Other	1,77

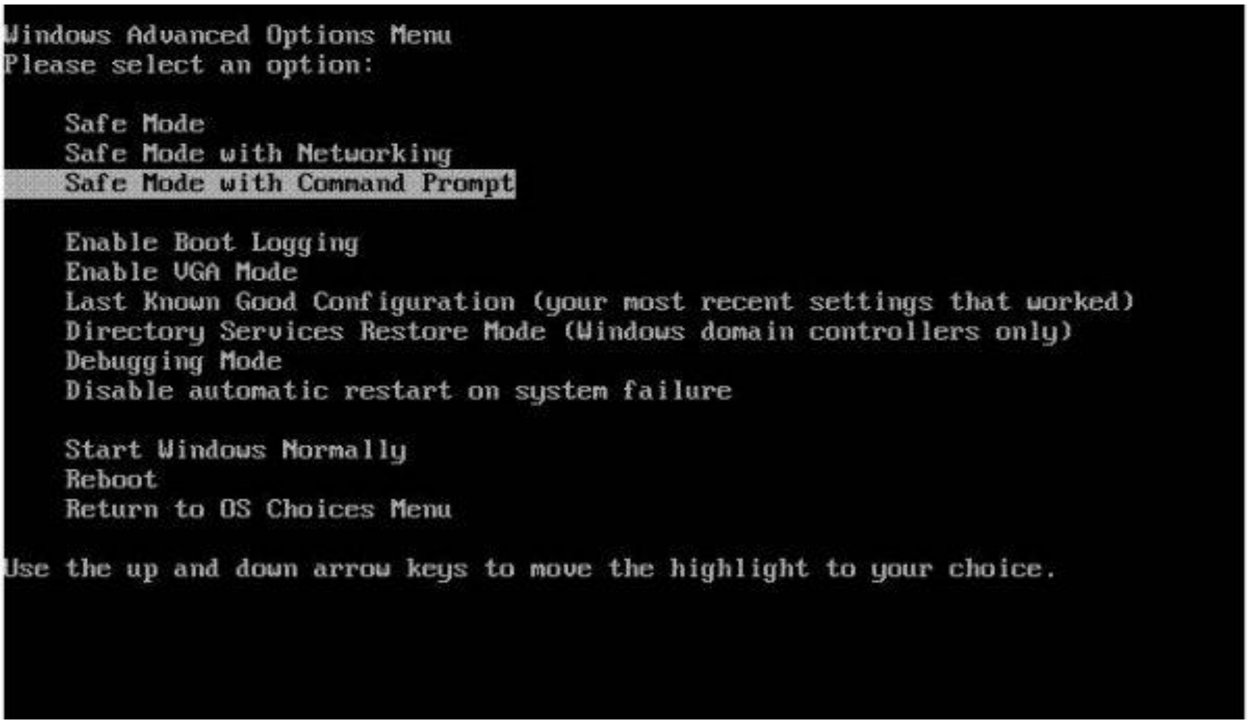
При запуске Виндовс могут возникать ошибки. Поговорим о некоторых ошибках.

Ошибки при запуске (рис 1)



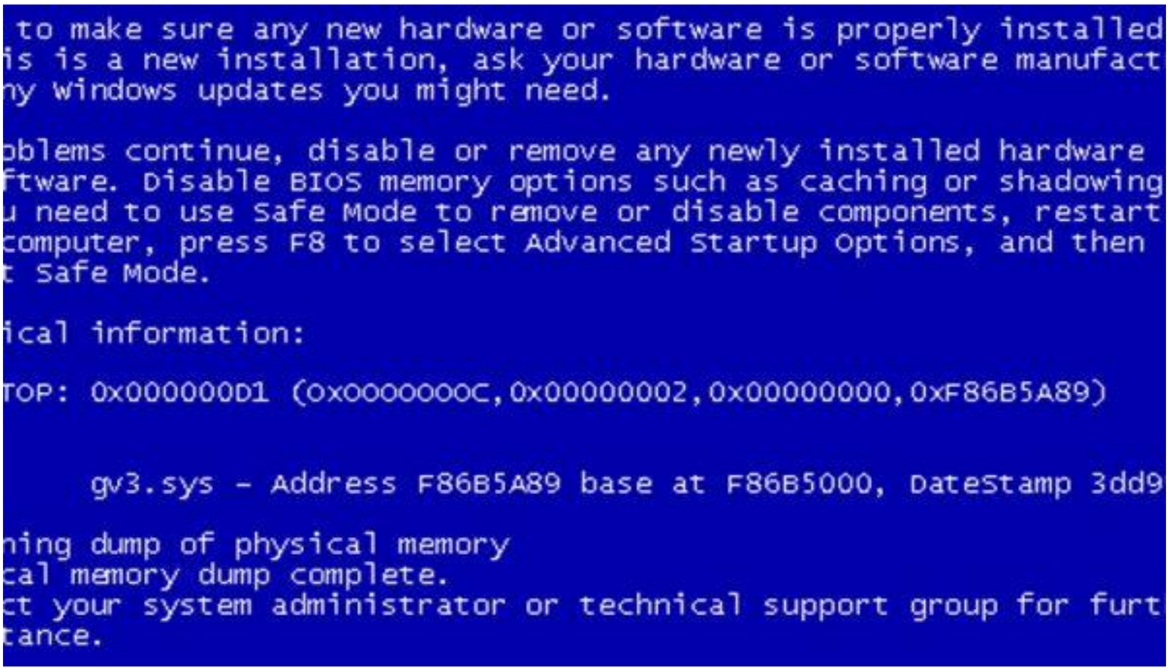
Как говорили выше, при каждом запуске операционной системы программа post test проверяет все подключенные устройства. При обнаружении ошибок при работе какого-либо устройства появляется этот экран. Если хотим продолжить работу без этого устройства (в данном случае без устройства для чтения floppy диска) жмем клавищу F1. (рис 1)

Ошибки при запуске. (Рис 2)



Данная ошибка обычно появляется в персональных компьютерах при неправильном отключении компьютера (т.е. при отключении из электрической сети без предварительного завершения windows) (рис 2)

Ошибки при запуске. (Рис 3)



Эта ошибка является наиболее опасной (так называемый синий экран смерти). (рис 3)

Синий экран смерти в Windows вызывает падение системы и перезагрузку компьютера. Синий экран смерти или BSOD (The blue screen of death) - появляется, когда Windows обнаруживает критическую ошибку, которую система не в состоянии исправить сама. Обычно синие экраны смерти вызваны неисправностью оборудования компьютера или драйверами. Самые частые причины BSOD - аппаратные сбои или проблемы с программным обеспечением уровня ядра Windows. Бывают падения, связанные с обновлениями антивирусов.

Синий экран обычно появляется, когда Windows обнаруживает STOP-ошибку. Это приводит к остановке работы системы Windows. В этом случае остается только принудительно выключить компьютер или перезагрузить его.

Некоторые советы по устранению данной ошибки

- Использование мастера восстановления системы (recover system)
- Сканирование компьютера (scan) антивирусной программой (с последним обновлением) на наличие вредоносных и опасных для системы программ
- Установление обновления для драйверов (drivers update)
- загрузка в безопасном режиме (safe mode). Если компьютер постоянно выдает сбои с BSOD, то попытайтесь загрузиться в безопасном режиме. В безопасном режиме Windows загружает только самые основные драйвера. Если синий экран смерти появляется из-за неверного или поврежденного установленного драйвера, то в безопасном режиме критической ошибки не будет.
- Выполнение диагностики аппаратных компонентов, так как синие экраны могут быть вызваны неисправным оборудованием
- Переустановление Windows (форматирование). Чистая установка системы (install) является радикальным действием, но она позволит избавиться от возможных проблем установленных программ. Если после переустановки системы, ошибки продолжаются, то они связаны с оборудованием.

Список литературы

1. А.Ш. Сулейманов, М.Д. Душдуров и др. «Практикум по информатике», Баку-2014
2. Т.Ф. Ферзиев «Информатика», Баку-2011
3. А.А. Усманов, «Правильная настройка и обслуживание операционной системы Windows» 2019
4. А.М. Кенин, «Практическое руководство системного администратора, Санкт Петербург-2013
5. https://www.comss.ru6.

МЕТОДЫ ОРГАНИЗАЦИИ БЕЗОПАСНОСТИ В ОПЕРАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Чеховских Е.Н., Гусева Л.Л.

СКФУ, РФ, г. Ставрополь

Проблема безопасности личных данных всегда актуальна, а с наступлением цифровой эпохи дополнительной проблемой являются различные уязвимости на разных уровнях и киберпреступность в целом. В настоящий момент отмечают существенный прирост различных атак, и для защиты от них требуется комплекс соответствующих мероприятий.

Само по себе понятие операционной системы подразумевает под собой специально организованный пакет программ, который управляет ресурсами системы для достижения высокоэффективного использования ЭВМ и предоставляет пользователю интерфейс с ресурсами. Аналогично ЭВМ, операционные системы совершенствовались, разница между ними также выделяется конкретными поколениями. С момента перехода к мультипроцессорной организации ОС, стали ощутимы и трудны в решении проблемы с распределением ресурсов и их защиты. Для решения реализована организация ОС и массовое применение совокупности аппаратных средств защиты (диагностика, защита памяти и прочее). Несмотря на то, что основной идей в развитии ЭВМ является её предельная доступность для пользователя, это полностью расходится с требованиями обеспечения защиты данных. Ввиду этого многие ОС имеют дефекты с позиции защиты данных пользователя в системе.

Защищенная операционная система в своей структуре имеет функционирующие средства и механизмы защиты данных, в то время как безопасность ОС является состоянием, в момент которого недопустимо преднамеренное или случайное повреждение функционирования операционной системы.

Можно выделить некоторые особенности ОС в особую категорию, которые позволяют решить задачу с обеспечением безопасности системы:

- возможность распоряжаться всеми ресурсами ОС;
- сложность и размер ОС;
- присутствие механизмов, которые в той или иной степени влияют на безопасность данных пользователя и программ, функционирующих в пространстве среды ОС.

Ключевым вопросом обеспечения безопасности ОС считается проблема формирования алгоритма контроля доступа к ресурсам системы. Порядок контроля доступа осуществляется в соответствии запроса к предоставленным правам доступа субъекта. Помимо этого, сама ОС имеет дополнительные возможности защиты, например, средства мониторинга. Последнее выполняет регулярное ведение регистрационного журнала, записи которого состоят из происходящих в системе событий. Вместе вышеперечисленные средства защиты и контроля доступа сформировывают механизм управления доступом к системе.

В каждой ОС необходимо реализовать подсистему безопасности, которая проверяет на наличие угроз извне, т.е. защищает компьютерную систему от несанкционированного доступа, случайного ввода ложных данных, злонамеренной порчи или уничтожения информации. Из-за наличия несколько типичных для ОС функциональных дефектов, происходит возникновение канала утечки информации, в частности, данных пользователя.

Осуществление надежной защиты ОС недопустимо без анализа вероятных угроз для безопасности системы. Угрозы прямо пропорционально зависят от множества факторов, например: хранимой и обрабатываемой информации, условий, при которых ОС используется и т.д. Так, угрозы безопасности ОС можно типизировать по соответствующим факторам их возможной реализации:

1. Цель атаки (чтение, изменение, уничтожение информации или разрушение ОС);
2. Возможное влияние на ОС (использование легальных и нелегальных каналов получения информации, а также создание новых благодаря всевозможным программным закладкам);
3. По типу воздействия на ОС (активное или пассивное воздействие);
4. По фактору уязвимости защиты (ошибки программного обеспечения ОС, ошибки администратора, введенные программные закладки).

Также классификация угроз безопасности ОС возможна по используемым средствам атаки, выбранным объектам, способам воздействия на объект и действиям атакующего, а также по состоянию ОС.

Методами обеспечения безопасности ОС от дефектов являются:

1. Аутентификация.

Наиболее популярный метод обеспечения безопасности – аутентификация пользователя при входе в систему. Такой способ реализуется через логины и пароли, именно их злоумышленнику необходимо иметь для осуществления атаки. Принимаемые меры для актуального обеспечения безопасности сохранности данных:

- своевременная смена паролей;
- сложность пароля, не связанных с пользователем (даты рождения, ФИО и прочее);
- наличие пороговых значений попыток входа в ОС;
- при наличии списка паролей, хранить их в зашифрованном виде.

2. Системные угрозы.

Уязвимости в системных программах дают осуществить атаку на систему. Возможность получить вредоносные программы или фрагменты кода, которые встраиваются в обычные программы, увеличивается при несоблюдении своевременных мер безопасности. Наличие антивирусных программ сможет вовремя обнаружить вирусы в ОС и устранить их.

3. Права доступа

Во время формирования механизмов контроля доступа важно определить объекты и субъекты доступа. Объектами могут являться всевозможные файлы, программы, устройства, терминалы, семафоры, в то время как субъектами – процессы, задания, процедуры или же сам пользователь. Субъекты имеют возможность быть рассмотрены одновременно и как объекты, поэтому у таких субъектов, при наличии соответствующих полномочий, появляются права на доступ к другим субъектам.

Управление правами доступа возможно на принципах одной из модели доступа: многоуровневой или матричной.

Матричная модель заключается в том, чтобы для каждого субъекта был установлен перечень прав по отношению к объекту. В то время как многоуровневые модели предполагают раздачу мандатов (меток конфиденциальности) назначаемых объектам и субъектам доступа.

Большинство ОС и СУБД используют произвольное управление доступом. Конечно, у такого похода есть свой набор недостатков. Во-первых, из разъединенности в управлении доступом следует, что доверенными лицами по отношению к системе могут быть иные пользователи, помимо системных администраторов и операторов. Из-за недостаточной компетентности пользователя с доступом, на основе человеческого фактора, возможна случайная утечка секретной информации. Это ведет к тому, что произвольность управления необходимо полностью контролировать осуществлением избранной политики.

Во-вторых, данные и права доступа находятся в разных местах. Таким образом, нет никаких ограничений для пользователя, с повышенным доступом, иметь возможность записать в публичный файл или совершить заражение системы вредоносными программами. Такая, своего рода «уязвимость», затрудняет проведение системами единой политики безопасности и не осуществляет продуктивный контроль согласованности.

В момент предоставления доступа важна соответствующая информация:

1) Свойство субъекта (метка безопасности, являющаяся основой мандатного управления доступа, группа пользователя и т.д.);

2) Идентификатор субъекта (сетевой адрес компьютера, идентификатор пользователя и другие, являющиеся основами произвольного управления доступа).

Основываясь на всем вышесказанном, быстрое развитие информационных технологий создало такую информационную среду, которая прямо или косвенно влияет на все сферы деятельности. Помимо развития технологий, стремительно растут и возможные риски и угрозы, последствия которых порой невозможно предсказать.

Для реализации определенных информационных технологий необходимы информационные системы, безопасность которых является одной из главнейших задач. От поддержания целостности, конфиденциальности и доступности системы зависит итоговый результат жизнеспособности системы.

Операционная система оказывается важнейшим компонентом в любой вычислительной машине, в связи с этим основополагающую роль играет политика безопасности в каждой определенной ОС, от которой зависит общая безопасность всей информационной системы.

Список литературы

1. Дейтел, Х.М. Операционные системы. Ч. 2: Распределенные системы, сети, безопасность / Х.М. Дейтел, П.Дж. Дей-тел, Д.Р. Чофнес. – М. : Бином, 2006.
2. Дейтел, Х.М. Операционные системы. Ч. 1: Основы и принципы / Х.М. Дейтел, П.Дж. Дейтел, Д.Р. Чофнес. – М. : Бином, 2007.
3. Гордеев, А.В. Операционные системы : учебник для вузов / А.В. Гордеев. – СПб. : Питер, 2008. – 416 с.
4. Олифер, В.Г. Сетевые операционные системы / В.Г. Олифер, Н.А. Олифер. – СПб. : Питер, 2007. – 544 с.
5. Танненбаум, Э. Современные операционные системы. 2-е изд. / Э. Танненбаум. – СПб. : Питер, 2006. – 1040 с.
6. Кастер, Х. Основы Windows NT и NTFS. Русская редакция / Х. Кастер. – М., 2006.
7. Проскурин, В.Г. Защита в операционных системах / В.Г. Проскурин, С.В. Крутов, И.В. Мацкевич. – М. : Радио и связь, 2005.
8. Шаньгин В. Ф. Информационная безопасность. – М.: ДМК Пресс, 2014., стр. 165-188

ГЕОЛОГИЯ

СЕКЦИЯ №88.
РАЗВИТИЕ ГЕОЛОГИИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

ПЛАН КОНФЕРЕНЦИЙ НА 2020 ГОД

Январь 2020 г.

VII Международная научно-практическая конференция **«Актуальные вопросы естественных и математических наук в современных условиях развития страны», г. Санкт-Петербург**

Прием статей для публикации: до 1 января 2020 г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 февраля 2020 г.

Февраль 2020 г.

VII Международная научно-практическая конференция **«Актуальные проблемы естественных и математических наук в России и за рубежом», г. Новосибирск**

Прием статей для публикации: до 1 февраля 2020 г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 марта 2020 г.

Март 2020 г.

VII Международная научно-практическая конференция **«Актуальные вопросы современных математических и естественных наук», г. Екатеринбург**

Прием статей для публикации: до 1 марта 2020 г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 апреля 2020 г.

Апрель 2020 г.

VII Международная научно-практическая конференция **«Актуальные проблемы и достижения в естественных и математических науках», г. Самара**

Прием статей для публикации: до 1 апреля 2020 г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 мая 2020 г.

Май 2020 г.

VII Международная научно-практическая конференция **«Актуальные вопросы и перспективы развития математических и естественных наук», г. Омск**

Прием статей для публикации: до 1 мая 2020 г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 июня 2020 г.

Июнь 2020 г.

VII Международная научно-практическая конференция **«Современные проблемы математических и естественных наук в мире», г. Казань**

Прием статей для публикации: до 1 июня 2020 г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 июля 2020 г.

Июль 2020 г.

VII Международная научно-практическая конференция **«О вопросах и проблемах современных математических и естественных наук», г. Челябинск**

Прием статей для публикации: до 1 июля 2020 г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 августа 2020 г.

<u>Август 2020 г.</u>

VII Международная научно-практическая конференция **«Информационные технологии естественных и математических наук», г. Ростов-на-Дону**

Прием статей для публикации: до 1 августа 2020 г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 сентября 2020 г.

<u>Сентябрь 2020 г.</u>

VII Международная научно-практическая конференция **«Естественные и математические науки в современном мире», г. Уфа**

Прием статей для публикации: до 1 сентября 2020 г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 октября 2020 г.

<u>Октябрь 2020 г.</u>

VII Международная научно-практическая конференция **«Основные проблемы естественных и математических наук», г. Волгоград**

Прием статей для публикации: до 1 октября 2020 г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 ноября 2020 г.

<u>Ноябрь 2020 г.</u>

VII Международная научно-практическая конференция **«Естественные и математические науки: вопросы и тенденции развития», г. Красноярск**

Прием статей для публикации: до 1 ноября 2020 г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 декабря 2020 г.

<u>Декабрь 2020 г.</u>

VII Международная научно-практическая конференция **«Перспективы развития современных математических и естественных наук», г. Воронеж**

Прием статей для публикации: до 1 декабря 2020 г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 января 2021 г.

С более подробной информацией о международных научно-практических конференциях можно ознакомиться на официальном сайте Инновационного центра развития образования и науки <u>www.izron.ru</u> (раздел «Естественные и математические науки»).

ИННОВАЦИОННЫЙ ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

INNOVATIVE DEVELOPMENT CENTER OF EDUCATION AND SCIENCE

О вопросах и проблемах современных математических и естественных наук

Выпуск VII

Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции (11 июля 2020 г.)

г. Челябинск

2020 г.

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка авторская

Издатель Инновационный центр развития образования и науки (ИЦРОН),
603086, г. Нижний Новгород, ул. Мурашкинская, д. 7.

Подписано в печать 10.07.2020.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,94.
Тираж 250 экз. Заказ № 077.

Отпечатано по заказу ИЦРОН в ООО «Ареал»
603000, г. Нижний Новгород, ул. Студеная, д. 58.