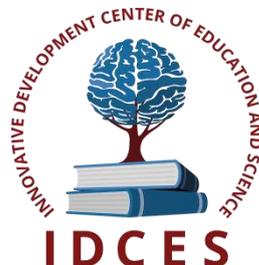


**ИННОВАЦИОННЫЙ ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ**  
**INNOVATIVE DEVELOPMENT CENTER OF EDUCATION AND SCIENCE**



**Информационные технологии естественных  
и математических наук**

**Выпуск IV**

**Сборник научных трудов по итогам  
международной научно-практической конференции  
(11 августа 2017г.)**

**г. Ростов-на-Дону  
2017 г.**

**Информационные технологии естественных и математических наук** / Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции. № 4. г. Ростов-на-Дону, 2017 г. 47 с.

**Редакционная коллегия:**

кандидат биологических наук Благодатнова Анастасия Геннадьевна (г. Новосибирск), кандидат биологических наук Войтка Дмитрий Владимирович (аг. Прилуки), кандидат физико-математических наук, доцент Казьмин Игорь Александрович (г. Ростов-на-Дону), кандидат физико-математических наук, доцент Кайракбаев Аят Крымович (г. Актобе), доктор физико-математических наук, профессор Каленский Александр Васильевич, кандидат биологических наук, доцент Корж Александр Павлович (г. Запорожье), кандидат физико-математических наук Лапушкин Георгий Иванович (г. Долгопрудный), доктор биологических наук Ларионов Максим Викторович (г. Балашов), доктор геолого-минералогических наук, профессор, академик РАН Лебедев Владимир Ильич (г. Кызыл), доктор биологических наук, профессор Лесовская Марина Игоревна (г. Красноярск), кандидат физико-математических наук, доцент Ловягин Юрий Никитич (г. Санкт-Петербург), кандидат физико-математических наук, член-корреспондент Американского института Аэронавтики и Астронавтики (AIAA) Лукин Александр Николаевич (г. Туапсе), кандидат биологических наук Малыгина Наталья Владимировна (г. Екатеринбург), кандидат физико-математических наук Матвеева Юлия Васильевна (г. Саратов), кандидат биологических наук Мошкина Светлана Владимировна (г. Орел), доктор химических наук, профессор Назарбекова Сауле Полатовна (г. Шымкент), доктор биологических наук, профессор Нурбаев Серик Долдашевич (г. Алматы), доктор биологических наук, профессор Околелова Алла Ароновна (г. Волгоград), кандидат физико-математических наук, доцент Седова Наталия Викторовна (г. Тамбов), кандидат биологических наук, профессор РАН Соловьева Анна Геннадьевна (г. Нижний Новгород), кандидат химических наук Туманов Владимир Евгеньевич (г. Черноголовка), кандидат физико-математических наук, доцент Чочиев Тимофей Захарович (г. Владикавказ), кандидат химических наук, профессор Шпейзер Григорий Моисеевич (г. Иркутск).

В сборнике научных трудов по итогам **IV** Международной научно-практической конференции «**Информационные технологии естественных и математических наук**», г. Ростов-на-Дону представлены научные статьи, тезисы, сообщения аспирантов, соискателей ученых степеней, научных сотрудников, докторантов, преподавателей ВУЗов, студентов, практикующих специалистов в области естественных и математических наук Российской Федерации, а также коллег из стран ближнего и дальнего зарубежья.

Авторы опубликованных материалов несут ответственность за подбор и точность приведенных фактов, цитат, статистических данных, не подлежащих открытой публикации. Мнение редакционной коллегии может не совпадать с мнением авторов.

Материалы размещены в сборнике в авторской правке.

Сборник включен в национальную информационно-аналитическую систему "Российский индекс научного цитирования" (РИНЦ).

## Оглавление

<b>ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.00.00)</b> .....	9
<b>МАТЕМАТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.00)</b> .....	9
<b>СЕКЦИЯ №1.</b> <b>ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.01)</b> .....	9
ОБ ИЗОМЕТРИЧНОМ ВЛОЖЕНИИ НОРМИРОВАННОГО КОНУСА В ПРОСТРАНСТВО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ Стонякин Ф. С. ....	9
<b>СЕКЦИЯ №2.</b> <b>ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ</b> <b>И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.02)</b> .....	11
<b>СЕКЦИЯ №3.</b> <b>МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.03)</b> .....	11
<b>СЕКЦИЯ №4.</b> <b>ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.04)</b> .....	11
<b>СЕКЦИЯ №5.</b> <b>ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.05)</b> .....	12
<b>СЕКЦИЯ №6.</b> <b>МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.06)</b> .....	12
БИЕКТИВНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ЭНОДОМОРФИЗМОВ И СУЩЕСТВЕННЫЕ ПРАВЫЕ ИДЕАЛЫ Мушруб В. А., Выборнова И.И., Иванкова Г.В., Мочалина Е.П.....	12
BIJECTIVE EXTENSIONS OF ENDOMORPHISMS AND ESSENTIAL RIGHT IDEALS Mushrub V. A., Vybornova I.I., Ivankova G. V., Mochalina E. P. ....	12
О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РАСШИРЕНИЙ ОРЕ Мушруб В. А., Выборнова И.И., Иванкова Г.В., Мочалина Е.П.....	16
ON SOME PROPERTIES OF ORE EXTENSIONS Mushrub V. A., Vybornova I.I., Ivankova G. V., Mochalina E. P. ....	17
<b>СЕКЦИЯ №7.</b> <b>ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.07)</b> .....	19
<b>СЕКЦИЯ №8.</b> <b>ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.09)</b> .....	19
<b>МЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.00)</b> .....	19
<b>СЕКЦИЯ №9.</b> <b>ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.01)</b> .....	19
<b>СЕКЦИЯ №10.</b> <b>МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.04)</b> .....	20
<b>СЕКЦИЯ №11.</b> <b>МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.05)</b> .....	20

<b>СЕКЦИЯ №12.</b>	
<b>ДИНАМИКА, ПРОЧНОСТЬ МАШИН, ПРИБОРОВ И АППАРАТУРЫ</b>	
<b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.06)</b> .....	20
К ВОПРОСУ О КОРРЕКТНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ	
ДЛЯ МОНИТОРИНГА, АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАБОТЫ	
КРИТИЧНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ	
Щербаков А.Ю. ....	20
<b>СЕКЦИЯ №13.</b>	
<b>БИОМЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.08)</b> .....	24
<b>АСТРОНОМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.00)</b> .....	24
<b>СЕКЦИЯ №14.</b>	
<b>АСТРОМЕТРИЯ И НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА</b>	
<b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.01)</b> .....	24
<b>СЕКЦИЯ №15.</b>	
<b>АСТРОФИЗИКА И ЗВЕЗДНАЯ АСТРОНОМИЯ</b>	
<b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.02)</b> .....	24
<b>СЕКЦИЯ №16.</b>	
<b>ФИЗИКА СОЛНЦА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.03)</b> .....	24
<b>СЕКЦИЯ №17.</b>	
<b>ПЛАНЕТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.04)</b> .....	24
<b>ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.00)</b> .....	24
<b>СЕКЦИЯ №18.</b>	
<b>ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ</b>	
<b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.01)</b> .....	25
<b>СЕКЦИЯ №19.</b>	
<b>ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.02)</b> .....	25
<b>СЕКЦИЯ №20.</b>	
<b>РАДИОФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.03)</b> .....	25
<b>СЕКЦИЯ №21.</b>	
<b>ФИЗИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.04)</b> .....	25
<b>СЕКЦИЯ №22.</b>	
<b>ОПТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.05)</b> .....	25
<b>СЕКЦИЯ №23.</b>	
<b>АКУСТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.06)</b> .....	25
<b>СЕКЦИЯ №24.</b>	
<b>ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ</b>	
<b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.07)</b> .....	25
<b>СЕКЦИЯ №25.</b>	
<b>ФИЗИКА ПЛАЗМЫ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.08)</b> .....	25
<b>СЕКЦИЯ №26.</b>	
<b>ФИЗИКА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.09)</b> .....	25
<b>СЕКЦИЯ №27.</b>	
<b>ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.10)</b> .....	25
<b>СЕКЦИЯ №28.</b>	
<b>ФИЗИКА МАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.11)</b> .....	25

<b>СЕКЦИЯ №29.</b> <b>ЭЛЕКТРОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.13)</b> .....	25
<b>СЕКЦИЯ №30.</b> <b>ТЕПЛОФИЗИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ТЕПЛОТЕХНИКА</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.14)</b> .....	25
<b>СЕКЦИЯ №31.</b> <b>ФИЗИКА И ТЕХНОЛОГИЯ НАНОСТРУКТУР,</b> <b>АТОМНАЯ И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.15)</b> .....	26
<b>СЕКЦИЯ №32.</b> <b>ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.16)</b> .....	26
<b>СЕКЦИЯ №33.</b> <b>ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ГОРЕНИЕ И ВЗРЫВ, ФИЗИКА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ</b> <b>СОСТОЯНИЙ ВЕЩЕСТВА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.17)</b> .....	26
<b>СЕКЦИЯ №34.</b> <b>КРИСТАЛЛОГРАФИЯ, ФИЗИКА КРИСТАЛЛОВ</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.18)</b> .....	26
<b>СЕКЦИЯ №35.</b> <b>ФИЗИКА ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ И УСКОРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.20)</b> .....	26
<b>СЕКЦИЯ №36.</b> <b>ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.21)</b> .....	26
<b>СЕКЦИЯ №37.</b> <b>ФИЗИКА ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.23)</b> .....	26
<b>ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.00)</b> .....	26
<b>СЕКЦИЯ №38.</b> <b>НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.01)</b> .....	26
<b>СЕКЦИЯ №39.</b> <b>АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.02)</b> .....	26
<b>СЕКЦИЯ №40.</b> <b>ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.03)</b> .....	26
<b>СЕКЦИЯ №41.</b> <b>ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.04)</b> .....	26
ПОЛУЧЕНИЕ ДИАГРАММЫ СОСТОЯНИЯ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ ИЗ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛЕТУЧЕГО ВЕЩЕСТВА Поляченко О.Г., Дудкина Е.Н., Болотова А.Ю., Парфенюк Ю.В., Поляченко Л.Д. ....	26
<b>СЕКЦИЯ №42.</b> <b>ЭЛЕКТРОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.05)</b> .....	32
<b>СЕКЦИЯ №43.</b> <b>ВЫСОКОМОЛЕКУЛЯРНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.06)</b> .....	32
<b>СЕКЦИЯ №44.</b> <b>ХИМИЯ ЭЛЕМЕНТООРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.08)</b> .....	32

<b>СЕКЦИЯ №45.</b> <b>ХИМИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.09)</b> .....	32
<b>СЕКЦИЯ №46.</b> <b>БИООРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.10)</b> .....	32
<b>СЕКЦИЯ №47.</b> <b>КОЛЛОИДНАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.11)</b> .....	32
<b>СЕКЦИЯ №48.</b> <b>БИОНЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.12)</b> .....	32
<b>СЕКЦИЯ №49.</b> <b>НЕФТЕХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.13)</b> .....	32
<b>СЕКЦИЯ №50.</b> <b>РАДИОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.14)</b> .....	32
<b>СЕКЦИЯ №51.</b> <b>КИНЕТИКА И КАТАЛИЗ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.15)</b> .....	32
<b>СЕКЦИЯ №52.</b> <b>МЕДИЦИНСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.16)</b> .....	33
<b>СЕКЦИЯ №53.</b> <b>МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ХИМИЯ</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.17)</b> .....	33
<b>СЕКЦИЯ №54.</b> <b>ХИМИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.21)</b> .....	33
<b>БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.00.00)</b> .....	33
<b>ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ БИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.00)</b> .....	33
<b>СЕКЦИЯ №55.</b> <b>РАДИОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.01)</b> .....	33
<b>СЕКЦИЯ №56.</b> <b>БИОФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.02)</b> .....	33
<b>СЕКЦИЯ №57.</b> <b>МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.03)</b> .....	33
<b>СЕКЦИЯ №58.</b> <b>БИОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.04)</b> .....	33
<b>СЕКЦИЯ №59.</b> <b>ФИЗИОЛОГИЯ И БИОХИМИЯ РАСТЕНИЙ</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.05)</b> .....	33
<b>СЕКЦИЯ №60.</b> <b>БИОТЕХНОЛОГИЯ (В ТОМ ЧИСЛЕ БИОНАНОТЕХНОЛОГИИ)</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.06)</b> .....	33
<b>СЕКЦИЯ №61.</b> <b>МОЛЕКУЛЯРНАЯ ГЕНЕТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.07)</b> .....	33
<b>СЕКЦИЯ №62.</b> <b>БИОИНЖЕНЕРИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.08)</b> .....	33
<b>СЕКЦИЯ №63.</b> <b>МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИОЛОГИЯ, БИОИНФОРМАТИКА</b> <b>(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.09)</b> .....	33

<b>ОБЩАЯ БИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.00)</b> .....	33
<b>СЕКЦИЯ № 64</b>	
<b>БОТАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.01)</b> .....	34
СТРУКТУРА ПОПУЛЯЦИЙ ЕЛИ В АРХАНГЕЛЬСКОЙ ОБЛАСТИ НА ОСНОВЕ 9-КЛАССНОЙ ГРАДАЦИИ ФЕНОТИПОВ Попов П. П. ....	34
<b>СЕКЦИЯ №65.</b>	
<b>ВИРУСОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.02)</b> .....	36
<b>СЕКЦИЯ №66.</b>	
<b>МИКРОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.03)</b> .....	36
<b>СЕКЦИЯ №67.</b>	
<b>ЗООЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.04)</b> .....	36
<b>СЕКЦИЯ №68.</b>	
<b>ЭНТОМОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.05)</b> .....	36
<b>СЕКЦИЯ №69.</b>	
<b>ИХТИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.06)</b> .....	36
<b>СЕКЦИЯ №70.</b>	
<b>ГЕНЕТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.07)</b> .....	37
<b>СЕКЦИЯ №71.</b>	
<b>ЭКОЛОГИЯ (ПО ОТРАСЛЯМ) (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.08)</b> .....	37
<b>СЕКЦИЯ №72.</b>	
<b>БИОГЕОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.09)</b> .....	37
<b>СЕКЦИЯ №73.</b>	
<b>ГИДРОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.10)</b> .....	37
<b>СЕКЦИЯ №74.</b>	
<b>ПАРАЗИТОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.11)</b> .....	37
<b>СЕКЦИЯ №75.</b>	
<b>МИКОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.12)</b> .....	37
<b>СЕКЦИЯ №76.</b>	
<b>ПОЧВОВЕДЕНИЕ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.13)</b> .....	37
<b>СЕКЦИЯ №77.</b>	
<b>БИОЛОГИЧЕСКИЕ РЕСУРСЫ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.14)</b> .....	37
<b>ФИЗИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.00)</b> .....	37
<b>СЕКЦИЯ №78.</b>	
<b>ФИЗИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.01)</b> .....	37
<b>СЕКЦИЯ №79.</b>	
<b>АНТРОПОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.02)</b> .....	37
<b>СЕКЦИЯ №80.</b>	
<b>ИММУНОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.03)</b> .....	37
<b>СЕКЦИЯ №81.</b>	
<b>КЛЕТОЧНАЯ БИОЛОГИЯ, ЦИТОЛОГИЯ, ГИСТОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.04)</b> .....	37
<b>СЕКЦИЯ №82.</b>	
<b>БИОЛОГИЯ РАЗВИТИЯ, ЭМБРИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.05)</b> .....	37

<b>СЕКЦИЯ №83.</b>	
<b>НЕЙРОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.06)</b> .....	37
<b>ГЕОГРАФИЯ</b> .....	38
<b>СЕКЦИЯ №84.</b>	
<b>ФИЗИЧЕСКАЯ ГЕОГРАФИЯ И БИОГЕОГРАФИЯ, ГЕОГРАФИЯ ПОЧВ И ГЕОХИМИЯ ЛАНДШАФТОВ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 25.00.23)</b> .....	38
ОСОБЕННОСТИ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВОЗМОЖНЫХ КЛИМАТИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ НА СТОК РЕК, РАСПОЛОЖЕННЫХ В РАЗЛИЧНЫХ ПРИРОДНЫХ УСЛОВИЯХ Гусев Е.М., Насонова О.Н., Ковалев Е.Э. ....	38
<b>СЕКЦИЯ №85.</b>	
<b>ЭКОНОМИЧЕСКАЯ, СОЦИАЛЬНАЯ, ПОЛИТИЧЕСКАЯ И РЕКРЕАЦИОННАЯ ГЕОГРАФИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 25.00.24)</b> .....	44
<b>СЕКЦИЯ №86.</b>	
<b>ГЕОМОРФОЛОГИЯ И ЭВОЛЮЦИОННАЯ ГЕОГРАФИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 25.00.25)</b> .....	44
<b>ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ</b> .....	44
<b>СЕКЦИЯ №87.</b>	
<b>ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ</b> .....	44
<b>ГЕОЛОГИЯ</b> .....	44
<b>СЕКЦИЯ №88.</b>	
<b>РАЗВИТИЕ ГЕОЛОГИИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ</b> .....	44
<b>ПЛАН КОНФЕРЕНЦИЙ НА 2017 ГОД</b> .....	45

# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.00.00)

## МАТЕМАТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.00)

### СЕКЦИЯ №1.

### ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.01)

#### ОБ ИЗОМЕТРИЧНОМ ВЛОЖЕНИИ НОРМИРОВАННОГО КОНУСА В ПРОСТРАНСТВО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Стонякин Ф. С.

ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского», г. Симферополь

*\* Исследования выполнены при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных-кандидатов наук, код МК-176.2017.1*

Во многих задачах (см., например [1] – [4]) возникают структуры, которые похожи на линейные пространства, однако умножение на скаляр  $\lambda$  вводится только для неотрицательных  $\lambda \geq 0$ . *Абстрактными выпуклыми конусами* или *выпуклыми конусами* принято называть набор элементов  $X$  с заданными операциями сложения, а также умножения на неотрицательный скаляр, причём  $X$  – коммутативная полугруппа по сложению и для произвольных чисел  $\lambda, \mu \geq 0$ , а также элементов  $x, y \in X$  верны соотношения:

$$1 \cdot x = x; (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x); 0 \cdot x = 0; \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y; (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$$

Попутно, как правило, также требуется выполнение так называемого *закона сокращения* «cancellation law»:

$$x + y = y + z \Leftrightarrow x = z \quad \forall x, y, z \in X. \quad (1)$$

Выпуклыми конусами с законом сокращения, в частности, будут: наборы векторов с неотрицательными координатами, набор неотрицательных функций, набор неубывающих функций с естественными операциями сложения и умножения на скаляр, а также набор выпуклых компактных подмножеств банахова пространства со сложением по Минковскому (и стандартным умножением на скаляр). В некоторых выпуклых конусах  $X$  возможно ввести *норму*  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0; \|\lambda x\| = \lambda \|x\|; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (2)$$

для всяких  $x, y \in X$  и произвольного  $\lambda \geq 0$ .

Выпуклые конусы с нормой, удовлетворяющей (2), мы будем называть *нормированными конусами*. В качестве примеров нормированных конусов можно также привести так называемые пространства с несимметричной нормой  $\|\cdot\|$ , для которой вместо обычной однородности требуется лишь  $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$  при  $\lambda \geq 0$ . При этом, вообще говоря,  $\| -x \| \neq \|x\|$ . Пространства с несимметричной нормой были введены М. Г. Кейном в связи с известной проблемой моментов (см., например [5]) и активно исследовались, в частности Е. П. Долженко, А. Р. Алимовым, П. А. Бородиным и другими математиками (см., например, [6, 7, 8]). Важный и естественный пример несимметричной нормы – функционал Минковского выпуклого несимметричного множества, содержащего 0.

В работах А. Р. Алимова [6] и П. А. Бородина [7] были получены аналоги теоремы Банаха-Мазура в сепарабельных пространствах с несимметричной нормой. Данная заметка посвящена аналогичному результату о сублинейном изометричном вложении в пространство  $C[0; 1]$  непрерывных функций всякого конуса в пространстве с несимметричной нормой (теорема 3).

Сначала напомним базисные результаты: полученный нами недавно в [9] аналог теоремы Хана-Банаха о продолжении линейного функционала в выпуклых конусах (теорема 1), а также аналог леммы об опорном функционале в нормированных конусах (следствие 1). В [9] мы ввели следующий аналог понятия подпространства в классе выпуклых конусов.

**Определение 1.** Будем говорить, что  $Y$  – *подконус*  $X$ , если  $Y \subset X$ ,  $Y$  является выпуклым конусом, а также для произвольных  $x \in X$  и  $y, z \in Y \subset X$  условие  $z = x + y$  означает, что  $x \in Y$ .

Например, для каждого фиксированного набора элементов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  из  $X$  подконусом будет множество

$$Y = \left\{ x \in X \mid x + \sum_{k=1}^n \mu_k x_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \text{ для всех } \lambda_k \mu_k \geq 0, k = \overline{1, n} \right\}.$$

Приведём теперь полученный нами недавно аналог теоремы Хана-Банаха о продолжении линейного функционала с подконуса  $Y \subset X$  на весь конус  $X$  в классе выпуклых конусов  $X$  с законом сокращения  $X \in (CL)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $X$  – выпуклый конус с законом сокращения. Пусть  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  – выпуклый функционал на  $X$ , пусть  $Y$  – подконус  $X$  и существует линейный функционал  $\ell: Y \rightarrow \mathbb{R}$  с оценкой  $\ell(y) \leq p(y)$  для любого  $y \in Y$ .

Тогда существует такой линейный функционал  $L: X \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $L(x) \leq p(x)$  для любого  $x \in X$  и  $L(y) = \ell(y)$  для любого  $y \in Y$ .

Перейдем к аналогу хорошо известной леммы об опорном функционале в нормированных конусах. Оказывается, что в абстрактных выпуклых конусах роль непрерывных (ограниченных) линейных функционалов могут играть полуограниченные (ограниченные сверху) линейные функционалы. Отметим, что такой функционал, вообще говоря, не ограничен снизу (см., например, [7]).

**Определение 2.** Будем говорить, что линейный функционал  $\ell$  *полуограничен* на  $X$ , если для некоторого  $C > 0$  при любом  $x \in X$  верно неравенство  $\ell(x) \leq C \|x\|$ .

Ясно, что множество  $X^*$  всех полуограниченных линейных функционалов на  $X$  будет выпуклым конусом, если стандартно ввести операцию сложения и умножения на неотрицательный скаляр для таких функционалов. Обозначим через  $X^*$  набор всех полуограниченных линейных функционалов  $\ell: X \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что  $\ell(x_0) \geq 0$  для некоторого  $x_0 \in X$ ,  $x_0 \neq 0$ .

**Определение 3.**  $X^*$  назовем *сопряженным конусом* к  $X$ .

Из теоремы 1 непосредственно следует аналог известной леммы об опорном функционале в классе выпуклых нормированных конусов.

**Следствие 1.** Пусть  $X$  – нормированный конус с законом сокращения. Тогда для каждого фиксированного  $x_0 \in X \setminus \{0\}$  существует такое  $\ell \in X^* \setminus \{0\}$ , что  $\ell(x) \leq \|x\|$  для всех  $x \in X$  и  $\ell(x_0) = \|x_0\|$ .

**Замечание 1.** Аналогичный результат известен в специальных классах нормированных конусов  $X$  для неотрицательных линейных функционалов  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^+$  (см. [4], теорема 2.14). Однако при этом, вообще говоря, равенство  $f(x_0) = \|x_0\|$  невозможно (см. замечание после теоремы 2.14 в [4]).

Теперь рассмотрим класса выпуклых конусов  $X$  в пространстве  $E$  с несимметричной нормой  $\|\cdot\|$ . Из теоремы 1 и следствия 1 вытекает следующая

**Теорема 2.** Всякий выпуклый конус  $X$  в пространстве  $E$  с несимметричной нормой  $\|\cdot\|$  *отделим*, т.е. для любых различных элементов  $x_1, x_2$  из  $X$  существует такой линейный функционал  $\ell: X \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $\ell(x) \leq \|x\|$  для всех  $x \in X$  и  $\ell(x_1) \neq \ell(x_2)$ , причем  $\ell(x_1) > 0$  или  $\ell(x_2) > 0$ .

**Следствие 2.** Во всяком отделимом нормированном конусе существует однородная метрика  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$$d(x, y) := \sup_{\|\ell\|_+ = 1} |\max\{0, \ell(x)\} - \max\{0, \ell(y)\}|,$$

для которой  $d(0, x) = \|x\|$  при всяком  $x$ .

Весьма хорошо известна теорема Банаха-Мазура, которая утверждает, что всякое сепарабельное банахово пространство изометрически изоморфно некоторому подпространству пространства  $C[0; 1]$  непрерывных функций  $\varphi: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Из теорем 1, 2, а также следствий 1 и 2 выводится сублинейный аналог теоремы Банаха-Мазура в рассматриваемых классах нормированных конусов. На базе метрики  $d$  из следствия 2 введём свойство сепарабельности выпуклого конуса  $X$  в пространстве  $E$  с несимметричной нормой.

**Определение 4.** Будем называть конус  $X$  *d-сепарабельным*, если существует такая последовательность  $\{a_m\}_{m=1}^\infty \subset X$ , что  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x, a_{m_k}) = 0$  при всяком  $x \in X$  для некоторой последовательности  $\{a_{m_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{a_m\}_{m=1}^\infty$  из  $X$ .

В частности,  $d$ -сепарабельным будет всякий конус в пространстве с несимметричной нормой  $E$ , которое сепарабельно относительно согласованной с  $\|x\|$  обычной нормы  $\|x\| = \max\{\|x\|, \|-x\|\}$ .

Сформулируем итоговый результат работы – аналог теоремы Банаха-Мазура для  $d$ -сепарабельных конусов в пространстве  $E$  с несимметричной нормой.

**Теорема 3.** Пусть  $X$  –  $d$ -сепарабельный конус в пространстве  $E$  с несимметричной нормой. Тогда  $X$  (относительно естественного порядка) сублинейно инъективно изометрично вложен в пространство непрерывных функций  $C[0; 1]$ .

**Замечание 2.** Отметим, что в силу неотрицательности функционалов  $p_\ell(x) = \max\{0, \ell(x)\}$  образ  $X$  при вложении из теоремы 3 есть некоторый набор (конус) неотрицательных функций в  $C[0; 1]$ .

**Замечание 3.** Отметим, что в общем случае линейность и изометричность вложения нормированного конуса  $X$  в нормированное пространство просто не совместны. В частности, для пространства  $X = E$  с несимметричной нормой  $\|\cdot\|$ , вообще говоря,  $\| -x \| \neq \|x\|$ . Пусть  $(F, \|\cdot\|)$  – обычное нормированное пространство. Для всякого линейного вложения  $\varphi: E \rightarrow F$ :

$$0 = \varphi(0) = \varphi(x - x) = \varphi(x) + \varphi(-x),$$

т.е.  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$  и  $\|\varphi(x)\|_F = \|\varphi(-x)\|_F$ , что противоречит изометричности вложения ( $\|x\|_E = \|\varphi(x)\|_F$  для всякого  $x \in E$ ).

### Список литературы

1. Rådström J. H. An embedding theorem for space of convex sets. // Proc. Amer. Math. Soc., 1952, vol.3, P. 165 – 169.
2. Roth W. A combined approach to the fundamental theorems for normed spaces. // Bulletin Acad. Sinica, 1994, vol. 11, P. 83 – 89.
3. Roth W. Hahn-Banach type theorems for locally convex cones. // Journal of the Australian Math. Soc. (Ser. A), 2000, vol. 68, no. 1, 104 – 125.
4. Selinger P. Towards a semantics for higher-order quantum computation. // Proceedings of the 2nd International Workshop on Quantum Programming Languages. Turku Centre for Computer Science General Publication, 2004, vol. 33, P. 127 – 143.
5. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973.
6. Алимов А.Р. Теорема Банаха-Мазура для пространств с несимметричным расстоянием. // Усп. мат. наук, 2003, т. 58(350), № 2, С. 159 – 160.
7. Бородин П. А. Теорема Банаха-Мазура для пространств с несимметричной нормой и ее приложения в выпуклом анализе. // Математические заметки, 2001, том 69, вып. 3, С. 329 – 337.
8. Долженко Е. П., Савостьянов Е.А. Аппроксимации со знакочувствительным весом. // Изв. РАН. Сер. матем., 1998, том 62, № 6, 59 – 102; 1999, том 63, № 6, С. 77 – 118.
9. Stonyakin F.S. An analogue of the Hahn-Banach theorem for functionals on abstract convex cones. // Eurasian Math. J, 2016, vol.7, no. 3, P. 89 – 99.

### СЕКЦИЯ №2.

#### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.02)

### СЕКЦИЯ №3.

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.03)

### СЕКЦИЯ №4.

#### ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.04)

## СЕКЦИЯ №5.

### ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.05)

## СЕКЦИЯ №6.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.06)

#### БИЕКТИВНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ЭНДОМОРФИЗМОВ И СУЩЕСТВЕННЫЕ ПРАВЫЕ ИДЕАЛЫ

Мушруб В. А., Выборнова И.И., Иванкова Г.В., Мочалина Е.П.

Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, г. Москва

#### АННОТАЦИЯ

В статье символом  $R$  обозначено ассоциативное кольцо с единицей, (не обязательно коммутативное),  $f : R \rightarrow R$  – эндоморфизм этого кольца с нулевым ядром  $A(R, f)$ . – расширение Кона-Джордана кольца  $R$  с помощью эндоморфизма  $f$ . Обозначим через  $\text{Lat}(R, f)$  решетку всех  $f$ -замкнутых правых идеалов кольца  $R$ . Обозначение  $u\text{-dim } S$  будет означать правую размерность Голди (однородную размерность) кольца  $S$ .

Одна из целей настоящей работы – доказательство неравенства для размерностей Голди  $u\text{-dim } A(R, f) \leq u\text{-dim } R$  (см. Теорему 1). В теореме 2 даны необходимые и достаточные условия достаточное условие правильного идеала идеала  $A(R, f)$ . Чтобы доказать эту теорему в общем случае, это еще одна цель этой работы.

Пусть  $R$  – полупервичное кольцо Голди справа (см. [1], [2], [3]). Еще одним результатом этой работы является теорема 3, которая дает эквивалентную характеристику существенных правых идеалов  $A(R, f)$  через  $\text{Lat}A(R, f)$ .

**Ключевые слова:** ассоциативные кольца; кольца Голди справа; однородная размерность.

All rings are unital associative in what follows. Throughout this paper  $R$  will stand for a ring and  $f$  will stand for an injective endomorphism of  $R$ .

#### BIJECTIVE EXTENSIONS OF ENDOMORPHISMS AND ESSENTIAL RIGHT IDEALS

Mushrub V. A., Vybornova I.I., Ivankova G. V., Mochalina E. P.

Russian Plekhanov University of Economics, Moscow , Russian Federation

#### Abstract

Throughout this paper  $R$  be an unital associative ring, not necessarily commutative,  $f : R \rightarrow R$  be a ring endomorphism with zero kernel  $\text{Ker } f = 0$  and  $A(R, f)$  be a Cohn-Jordan extension of  $R$  by means of  $f$ . Denote by the lattice  $\text{Lat}(R, f)$  of all  $f$ -closed right ideals of  $R$ . The notation  $u\text{-dim } S$  will stand for a right uniform dimension of an associative ring  $S$ .

One aim of this paper is to prove that  $u\text{-dim } A(R, f) \leq u\text{-dim } R$  (see Theorem 1). In Theorem 2, we give a sufficient condition for a right ideal of  $A(R, f)$  to be essential. To give a proof of this theorem in the general case is another goal of this work. Let  $R$  be a semiprime right Goldie ring (see [1], [2], [3]). Another important result of this paper is Theorem 3, which gives an equivalent characterization of essential right ideals of  $A(R, f)$  in terms of  $\text{Lat}(R, f)$ .

**Keywords:** associative rings; right Goldie rings; uniform dimension.

*Definition 1.* Let  $A$  be a ring and  $\tilde{f}$  be an automorphism of  $A$ . The pair  $(A, \tilde{f})$  is called a Cohn-Jordan extension of the pair  $(R, f)$  if the following three conditions hold

- 1)  $R$  is a subring of  $A$ ;
- 2)  $\tilde{f}(r) = f(r)$  for all  $r \in R$ , i.e.  $\tilde{f}$  is an extension of  $f$ ;
- 3)  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{f}^{-n}(R)$ .

The ring  $A$  is called a Cohn-Jordan extension of  $R$  and is denoted by  $A(R, f)$ . The ring  $A$  has the following universal property. Let  $\iota: R \rightarrow B$  be a ring injection and  $\beta$  be an automorphism of  $B$ , such that  $\iota \circ f = \beta \circ \iota$ . Then the mapping  $\iota: R \rightarrow B$  can be extended to an injection  $\tilde{\iota}: A \rightarrow B$  such that  $\tilde{\iota} \circ \tilde{f} = \beta \circ \tilde{\iota}$ .

Cohn-Jordan extensions are studied and used for various purposes. For example, using these extensions the uniform dimension of skew polynomial rings is studied in [2], [5], and [9]. By means of the Cohn-Jordan expansion in [1] this extension is applied to study skew semigroup rings over quasi-Baer rings. In [7] a ring  $R$  is extended by a commutative monoid of endomorphisms, and in [3] the most general construction of the Cohn-Jordan extension for semigroups of endomorphisms is studied.

The ring  $A(R, f)$  can be constructed either by using the direct limit of the rings or as a subring of the left classical quotient ring  $Q = X^{-1}R[x, f]$  of the skew polynomial ring (with multiplication defined by  $xr = f(r)$  ( $\forall r \in R$ )) where  $X = \{x^n: n \geq 0\}$ .

Let us consider sequences of elements of the ring  $R$ , starting with a term  $r_n$  with the number  $n \geq 0$ . If we use the first approach then elements of the ring  $A(R, f)$  are equivalence classes of infinite sequences of elements of the ring  $R$  of the form  $(r_j \in R: j \geq n)$  such that  $f(r_{j+1}) = r_j$  for all  $j \geq n$ , with componentwise addition and multiplication. For example, addition is as follows:  $(r_j: j \geq n) + (s_j: j \geq m) = (r_j + s_j: j \geq \max(n, m))$ .

Such sequences are called  $f$ -sequences or threads (see [4]). More precisely, the elements of the ring  $A(R, f)$  are equivalence classes of such sequences. Sequences  $(r_j: j \geq n)$  and  $(s_j: j \geq m)$  are equivalent if and only if  $r_j = s_j$  for all  $j \geq \max(n, m)$ . One can do without equivalence classes. In each equivalence class we can choose the sequence with the smallest initial index  $n$ . Then the elements of  $A(R, f)$  are all  $f$ -sequences  $(r_j: j \geq n)$  for which there is no in  $R$  the inverse image  $\tilde{f}^{-1}(r_n)$  of the initial element of this sequence.

Identifying  $r \in R$  with the equivalence class of the  $f$ -sequences  $(r_j = f^j(r): j \geq 0)$  one can consider  $R$  as a subring of the ring  $A(R, f)$ .

Each element  $a \in A(R, f)$  is an equivalence class containing an  $f$ -sequence  $(r_j = \tilde{f}^j(a): j \geq n)$  where  $n$  is a non-negative integer such that  $\tilde{f}^n(a) \in R$ .

The automorphism  $\tilde{f}$  acts componentwise on  $f$ -sequences, thereby continuing mapping  $f$  onto  $A(R, f)$ :

$$\tilde{f}: (r_j \in R: j \geq n) \mapsto (f(r_j) \in R: j \geq n)$$

It follows from the above argument that the inverse automorphism  $\tilde{f}^{-1}$  maps the equivalence class of  $(r_j: j \geq n) \sim (f(r_{j+1}): j \geq n)$  to the equivalence class of  $(r_{j+1}: j \geq n)$ .

Throughout the sequel  $A = A(R, f)$ .

*Definition 2.* To say that  $N$  is an  $f$ -ideal of  $R$  is to say that  $N$  is an ideal and  $f^{-1}(N) = N$ .

*Definition 3.* Let  $M$  be a right ideal of  $R$ . We say that  $M$  is a right  $f$ -ideal (see. [6], [8], [10]), if either of the two equivalent conditions (1), (2) holds:

- 1)  $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(f^n(M)R)$ ;
- 2)  $M = MA \cap R$ .

*Lemma 1.* A right ideal  $L$  of  $A$  is essential in  $A$  if and only if for each nonzero element  $r \in R$  and for every nonnegative integer  $n$ , there is a nonnegative integer  $m$  such that  $f^m(r)R \cap \tilde{f}^{n+m}(L) \neq 0$ .

For a proof we refer to [4, Proposition 2].

*Definition 4.* Let  $I_n$  be right ideals of the ring  $R$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . We say that  $(I_n : n \geq 0)$  is an  $f$ -sequence, if  $f^{-1}(I_{n+1}) = I_n$  for each number  $n \geq 0$ .

It is easy to see that for every  $f$ -sequence  $(I_n : n \geq 0)$  of right ideals of  $R$  the set

$$\rho(I_n : n \geq 0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \tilde{f}^{-n}(I_n)$$

is a right ideal of the ring  $A$ .

If  $I$  is a right ideal of the ring  $A$ , then we set  $I^{(n)} = \tilde{f}^n(I) \cap R$  where  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Observe that  $(I^{(n)} : n \geq 0) = (\tilde{f}^n(I) \cap R : n \geq 0)$  is an  $f$ -sequence of right  $f$ -closed ideals of  $R$ . We denote this sequence by  $\zeta(I)$ . It is obvious that  $\rho(\zeta(I)) = I$ .

*Lemma 2.* If  $I$  is a nonzero right ideal of  $A$  then there exists an index  $n_0$  such that  $I^{(n)} \neq 0$  for each index  $n \geq n_0$ .

*Proof.* Let  $0 \neq a \in I$ . By the definition of the Cohn-Jordan extension,  $a$  can be presented as  $a = \tilde{f}^{-n_0}(r)$  where  $n_0$  is a non-negative integer and  $0 \neq r \in R$ . It remains to note that  $\tilde{f}^{n_0+k}(a) = f^k(r) \in I^{(n_0+k)}$  for all numbers  $k \geq 0$ .

We denote by  $\text{u-dim}(R_R)$  the right uniform (Goldie) dimension of the ring  $R$ , that is, the uniform dimension of the ring  $R$  as a right module over itself (see [11], 4.28, P. 50).

*Theorem 1.* (a). Suppose that there exists a positive integer  $d$  such that any direct sum of nonzero  $f$ -closed right ideals of  $R$  contains at most  $d$  summands. Then  $\text{u-dim}(A_A) \leq d$ .

(b).  $\text{u-dim}(A_A) \leq \text{u-dim}(R_R)$ .

*Proof.* (a). Suppose that  $\text{u-dim}(A_A) > d$ . Then there exists a direct sum of nonzero right ideals of  $A$  containing  $d + 1$  summands. Pick a nonzero elements  $a_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, d + 1$ ), in each of these summands. Then we obtain a

direct sum  $\bigoplus_{k=1}^{d+1} a_k A$  of nonzero principal right ideals of  $A$ . Observe that  $a_k \in \tilde{f}^{-n_k}(R)$  for some available non-negative integers  $n_k$ .

Let  $n = \max\{n_1, n_2, \dots, n_{d+1}\}$ . Then  $r_k = \tilde{f}^n(a_k) \in R$ , ( $k = 1, 2, \dots, d + 1$ ) and  $\bigoplus_{k=1}^{d+1} r_k A = \tilde{f}^n \left( \bigoplus_{k=1}^{d+1} a_k A \right)$

is a direct sum of right ideals of  $A$ . Since  $r_k \in r_k A \cap R$  and  $r_k A \cap R$  is an  $f$ -closed ideal of  $R$ , we have that  $r_k A \cap R \neq 0$ . Thus,  $\bigoplus_{k=1}^{d+1} r_k A \cap R$  is a direct sum of nonzero  $f$ -closed right ideals of  $R$  containing  $d + 1$  summands,

which contradicts the assumption of the theorem. (b). If the uniform dimension of the ring  $R$  is infinite then inequality (b) is obvious. If the uniform dimension of  $R$  is finite and equals  $d$  then from part a) of the theorem it follows that  $\text{u-dim}(A_A) \leq d$ .

In the paper [4] the authors introduced the lattice  $\text{Lat}(R, f)$  of all right  $f$ -closed ideals of  $R$ . In this lattice, the operation of intersection is usual. The lattice  $\text{Lat}(R, f)$  is supplied by the operation  $B \vee C = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(f^n(B)R + f^n(C)R)$  instead of addition. An  $f$ -closed right ideal  $B$  of  $R$  is called an essential element of  $\text{Lat}(R, f)$  if  $B \cap C \neq 0$  for every nonzero  $C \in \text{Lat}(R, f)$ .

Now we will prove two simple theorems, which give us to take a new mode of thought on the description of essential right ideals of the Cohn-Jordan expansion.

*Theorem 2.* Let  $L$  be a right ideal of  $A$ . Suppose that for each positive integer  $m$  there is an integer  $k \geq m$  such that the right ideal  $L^{(k)}$  is an essential element of  $\text{Lat}(R, f)$ . Then  $L$  is an essential right ideal  $A$ .

*Proof.* Let  $M$  be a nonzero right ideal of  $A$ . Then  $M^{(n)} \neq 0$  for all  $n \geq n_0$  by Lemma 2. By the hypothesis of the theorem, there exists a number  $k \geq n_0$  such that  $L^{(k)}$  is an essential element of  $\text{Lat}(R, f)$ . It follows that  $L^{(k)} \cap M^{(k)} \neq 0$  and therefore  $0 \neq \tilde{f}^{-k}(L^{(k)} \cap M^{(k)}) \subset L \cap M$ .

*Theorem 3.* Let  $R$  be a semiprime right Goldie ring (see [11, P. 98]) and  $L$  an essential right ideal of  $A$ . Then the following conditions (1), (2), (3) and (4) are equivalent:

- (1)  $L$  is an essential right ideal of  $A$ ;
- (2) given any positive integer  $m$  there exists a number  $k \geq m$  such that the right ideal  $L^{(k)}$  is essential in the lattice  $\text{Lat}(R, f)$ ;
- (3) for every positive integer  $m$ , there exists a number  $k \geq m$  such that  $L^{(k)}$  is an essential right ideal of  $R$ ;
- (4) for each nonzero element  $r \in R$  and for each integer  $n \geq 0$  there exists an integer  $m \geq 0$  such that  $f^m(r)R \cap \tilde{f}^{n+m}(L) \neq 0$ .

*Proof.* “(1) $\Rightarrow$ (3)”.

Theorem 3.4 of [2] shows that in the case of a semiprime right Goldie ring  $R$  the right uniform dimensions of the rings  $R$  and  $A$  coincide:  $\text{u-dim}(R_R) = \text{u-dim}(A_A)$ . Let  $\text{u-dim}(A_A) = d$ . Since  $\text{u-dim}(L_A) = \text{u-dim}(A_A)$ , to  $L_A$  contains

the direct sum  $\bigoplus_{k=1}^d a_k A$  of  $d$  nonzero principal right ideals of  $A$ .

Suppose that condition (2) is not satisfied. In other words, suppose that there exists a positive integer  $m$  such that  $L^{(n)}$  is not essential in  $R$  for each number  $n \geq m$ . Arguing as in the proof of Theorem 1, we can find a nonnegative integer  $n$  such that  $r_k = \tilde{f}^n(a_k) \in R$ , ( $k = 1, 2, \dots, d$ ). Clearly, we can choose  $n \geq m$ . Observe that

$\bigoplus_{k=1}^d r_k R \subseteq L^{(n)}$  and  $r_k R \neq 0$ . Since  $L^{(n)}$  is not essential element of  $\text{Lat}(R, f)$ , we have that  $L^{(n)} \cap I = 0$  for some

nonzero right ideal  $I$  of  $R$ . It follows that  $\left( \bigoplus_{k=1}^d r_k R \right) \oplus I$  is a direct sum of  $d + 1$  nonzero right ideals of  $R$ . This

contradicts the equality  $\text{u-dim}(R_R) = d$ .

“(3) $\Rightarrow$ (2)”. Condition (2) is weaker than (3).

“(2) $\Rightarrow$ (1)”. This implication is proved in Theorem 2

“(1) $\Leftrightarrow$ (4)”. This equivalence is proved in Lemma 1.

In view of Theorem 3, we can put the following open question.

Suppose that  $\text{u-dim}(R_R)$  is finite or  $\text{u-dim}(A_A)$  is finite, but the ring  $R$  is not semiprime or does not satisfy the ascending chain condition on right annihilators. Is it true that the conditions (1) and (2) proposed in Theorem 3 are still equivalent in this case.

### Список литературы

1. Hashemi E. The Cohn-Jordan extension and skew monoid rings over a quasi-Baer ring// Communications of the Korean Mathematical Society. — 2006. — Vol. 21, №1. — P. 1–9.
2. Leroy A., Matczuk J. Goldie conditions for Ore extensions over semiprime rings//Algebras and Representation Theory. — 2005. — Vol. 8, №5. — P. 679–688.
3. Matczuk J. S-Cohn-Jordan extensions // Communications in Algebra. — 2007. — Vol. 35, №3. — P. 725-746.
4. Mushrub V. Endomorphisms and invariance of radicals of rings// Contemporary Mathematics — 2007. — Vol. 131, Part 2. — P. 363-379.
5. Мушруб В.А. О размерности Голди расширений Ore со многими переменными//Фундаментальная и прикладная математика. — 2001. — Т. 7, №4 — С. 1107–1121.

6. Мушруб В.А. Эндоморфизмы и радикалы колец: Автореф. дис. канд. физ-мат. наук. — М., 1992. — 11 с.
7. Мушруб В.А. Эндоморфизмы и радикалы колец: дис. канд. физ-мат. наук. — М., 1992. — 158 с.
8. Mushrub V.A., Sukhorukova I.V., Mochlina E. P., Ivankova G.V. Some properties of the lattice of  $f$ -closed right ideals. To appear.
9. Пчелинцев С.В., Гришин А.В., Красильников А.Н., Мушруб В.А. Тожества алгебраических объектов // Отчет о НИР № 97-01-00785 (Российский фонд фундаментальных исследований).
10. Сухорукова И., Мушруб В. The Jacobson radical and ring endomorphisms // Уральский научный вестник. — 2016. — Т. 4. — С. 155-164.
11. Туганбаев А.А. Теория колец. Арифметические кольца и модули. — М.: МЦНМО, 2009. — 472 с.

### Bibliography

1. Hashemi E. The Cohn-Jordan extension and skew monoid rings over a quasi-Baer ring// Communications of the Korean Mathematical Society. — 2006. — Vol. 21, №1. — P. 1–9.
2. Leroy A., Matczuk J. Goldie conditions for Ore extensions over semiprime rings//Algebras and Representation Theory. — 2005. — Vol. 8, №5. — P. 679–688.
3. Matczuk J. S-Cohn-Jordan extensions // Communications in Algebra. — 2007. — Vol. 35, №3. — P. 725-746.
4. Mushrub V. Endomorphisms and invariance of radicals of rings// Contemporary Mathematics — 2007. — Vol. 131, Part 2. — P. 363-379.
5. Mushrub V.A. O razmernosti Goldi rasshireniy Ore so mnogimi peremennymi//Fundamental'naya i prikladnaya matematika. — 2001. — Т. 7, №4 — P. 1107–1121
6. Mushrub V.A. Endomorfizmy i radikaly kolets: Avtoref. dis. kand. fiz-mat. nauk. — Moscow, 1992. — 11 P.
7. Mushrub V.A. Endomorfizmy i radikaly kolets: dis. kand. fiz-mat. nauk. — Moscow, 1992. — 158 P.
8. Mushrub V.A., Sukhorukova I.V., Mochlina E. P., Ivankova G.V. Some properties of the lattice of  $f$ -closed right ideals. To appear.
9. Pchelintsev S.V., Grishin A.V., Krasilnicov A.N., Mushrub V.A. Identities of algebraic objects // research report № 97-01-00785 (Russian Foundation for Basic Research), 1997
10. Sukhorukova I., Mushrub V. The Jacobson radical and ring endomorphisms // Ural'skiy nauchnyy vestnik. — 2016. — Т. 4. — P. 155-164.
11. Tuganbayev A.A. Teoriya kolets. Arifmeticheskiye kol'tsa i moduli. — Moscow: MCCME, 2009. — 472 P.

## О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РАСШИРЕНИЙ ОРЕ

**Мушруб В. А., Выборнова И.И., Иванкова Г.В., Мочалина Е.П.**

Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, г. Москва

### АННОТАЦИЯ

В данной статье символом  $R$  обозначено ассоциативное кольцо и  $F$  – инъективный эндоморфизм этого кольца. В статье изучены некоторые свойства расширения Оре  $R[x, F]$ , в котором операция умножения определена соотношением  $xr = F(r)x$  для всех  $r \in R$ . Эндоморфизм  $F$  естественным образом продолжается на кольцо  $R[x, F]$ , если положить  $F(x) = x$ . Введем обозначение  $S = R[x, F]$ . Основными результатами являются теоремы 1 и 2. Теорема 1 показывает, что расширенный центроид кольца  $S$  изоморфен расширенному центроиду кольца  $A(x, f)$ . В теорема 2 найдены условия, достаточные для того, чтобы расширение Оре  $S$  было первичным кольцом.

**Ключевые слова:** расширения Оре, кольца частных, обобщенный центроид.

## ON SOME PROPERTIES OF ORE EXTENSIONS

Mushrub V. A., Vybornova I.I., Ivankova G. V., Mochalina E. P.

### Abstract

In this paper the symbol  $R$  denotes an associative ring and  $F$  is an injective endomorphism of this ring. We study some properties of the Ore extension  $R[x, F]$ , with multiplication defined  $xr = F(r)x$  for all  $r \in R$ . The endomorphism  $F$  extends in a natural way to the ring  $R[x, F]$ , if we set  $F(x) = x$ . Let  $S = R[x, F]$ . The main results of the present work are Theorems 1 and 2. Theorem 1 shows that the extended centroid of the ring  $S$  is isomorphic to the extended centroid of the ring  $A\langle x, f \rangle$ . Theorem 2 gives sufficient conditions for the Ore extension  $S$  to be a prime ring.

Напомним, что существует наименьшее кольцо  $A$ , содержащее кольцо  $R$  и обладающее автоморфизмом  $f: A \rightarrow A$  продолжающим эндоморфизм  $F$ . Расширения Оре являются классическим объектом исследования  $R[x, F]$  в современной алгебре и имеют различные приложения в других областях современной математики (см. [3], [4], [5])

*Определение* (см. [2], [7], [9]). Пусть  $A$  – кольцо и  $f$  – автоморфизм кольца  $A$ . Пара  $(A, f)$  называется расширением Кона-Джордана пары  $(R, f)$ , если

- 1) кольцо  $R$  является подкольцом кольца  $A$ ;
- 2) ограничение  $f|_R$  автоморфизма  $f$  на кольцо  $R$  совпадает с эндоморфизмом  $F$ ;
- 3)  $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(R)$ .

Решетка идеалов кольца  $A$  изучена в работе [18].

Всюду далее  $A$  и  $f$  – кольцо и автоморфизм, образующие расширение Кона-Джордана пары  $(R, f)$ . Как известно (см. [8], [17]), кольцо  $A$  является единственным с точностью до изоморфизма.

Напомним, что идеал  $I$  кольца  $R$  называется  $F$ -инвариантным, если  $F(I) \subseteq I$  (см. [11], [12], [13]). Идеал  $I$  кольца  $R$  называется  $F$ -идеалом, если  $F^{-1}(I) = I$  (см. [6], [7]). Обозначим через  $\Phi(A)$  и  $\Gamma(R)$  множества всех ненулевых  $f$ -идеалов кольца  $A$  и всех  $F$ -инвариантных идеалов кольца  $R$ , соответственно.

*Лемма 1.* Если  $I$  является  $F$ -инвариантным идеалом кольца  $R$ , то  $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(I)$  является  $f$ -идеалом кольца  $A$ :

$$I \in \Gamma(R) \Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(I) \in \Gamma(A).$$

Доказательство этой леммы может быть найдено в работах [7], [10].

*Лемма 2.* Пусть  $I$  – любой  $F$ -инвариантный идеал кольца  $R$  и  $K = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(I)$ . Тогда для любых элементов  $b \in K$  и  $a \in A$  существует целое неотрицательное число  $n$  и элементы  $s \in I$ ,  $r \in R$  такие, что  $a = f^{-n}(r)$  и  $b = f^{-n}(s)$ .

*Доказательство.* Утверждение леммы легко следует из определения 1.

Кольцо называется  $I$ -первичным, если произведение любых его двух ненулевых  $f$ -идеалов не равно нулю (подробнее см. [19]).

*Лемма 3.* Следующие условия 1)-4) равносильны:

- (1) кольцо  $A$  является  $f$ -первичным;
- (2) кольцо  $R$  является  $F$ -первичным;
- (3) кольцо  $A[x, f]$  является  $f$ -первичным
- (4) кольцо  $S$  является  $F$ -первичным;
- (5) для любых двух  $F$ -инвариантных идеалов  $I$  и  $J$  кольца  $R$  из неравенства  $IJ = 0$  следует, что  $I = 0$  или  $J = 0$ .

*Доказательство.* “(1) $\Rightarrow$ (5)”. Пусть  $I$  и  $K$  – ненулевые  $F$ -инвариантные идеалы кольца  $R$ . Тогда  $J = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(I)$  и  $\mathcal{K} = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(K)$  будут ненулевыми  $f$ -идеалами кольца  $A$ . Так как кольцо  $A$  является  $f$ -первичным, то  $J \cdot \mathcal{K} \neq 0$  и поэтому  $f^{-n}(I)f^{-m}(K) \neq 0$  для некоторых индексов  $n, m \geq 0$ . Пусть, для определенности,  $n \geq m$ . Тогда, применяя автоморфизм  $f^n$  к последнему равенству получаем  $I \cdot f^{n-m}(K) \neq 0$ . Но  $f^{n-m}(K) \subseteq K$ , так как  $K$  является  $F$ -инвариантным идеалом. Отсюда,  $I \cdot K \neq 0$ .

Итак, мы доказали, что  $I \cdot K \neq 0$  для любых двух ненулевых  $F$ -идеалов кольца  $R$ . Поэтому кольцо  $R$  будет  $F$ -первичным.

“(5) $\Rightarrow$ (2)”. Условие (2) является более слабым, чем условие (5).

“(2) $\Rightarrow$ (1)”. Пусть  $J$  и  $\mathcal{K}$  – ненулевые  $f$ -идеалы кольца  $A$ . Тогда  $J \cap R$  и  $K = \mathcal{K} \cap R$  будут ненулевыми  $F$ -идеалами кольца  $R$ . Так как кольцо  $R$  является  $F$ -первичным, то  $0 \neq IK \subseteq J \cdot \mathcal{K}$ .

Утверждения “(3)⇒(4)” и “(4)⇒(3)” доказываются аналогично.

(1)⇒(3). Пусть  $I$  и  $K$  – ненулевые  $f$ -идеалы кольца  $A[x, f]$ . Пусть  $n$  – показатель степени, такой, что оба этих идеала содержат многочлены степени  $n$ . Обозначим через  $I_0$  и  $K_0$  множества старших коэффициентов этих идеалов при  $x^n$ . Заметим, что  $I_0$  и  $K_0$  являются, очевидно, ненулевыми левыми  $f$ -идеалами кольца  $A$ . Поэтому  $I_0x^nK_0x^n = I_0f^n(K_0)x^{2n} = I_0K_0x^{2n} \neq 0$  и, следовательно,  $IK \neq 0$ .

(3)⇒(1). Пусть  $I$  и  $K$  – ненулевые  $f$ -идеалы кольца  $A$ . Тогда  $I[x, f]$  и  $K[x, f]$  – ненулевые  $f$ -идеалы кольца  $A[x, f]$ . Поэтому найдутся  $y \in I$ ,  $z \in K$  и неотрицательное целое число  $n$  такие, что  $yx^n z = yf^n(z)x^n \neq 0$ . Но  $f^n(z) \in K$  и, следовательно,  $IK \neq 0$ .

(2) ⇒(5). Обозначим через  $A\langle x, f \rangle$  кольцо косых многочленов Лорана. Ясно, что расширение Оре  $S$  можно рассматривать как подкольцо кольца  $A\langle x, f \rangle$ , порожденное множеством  $RU\{x\}$ .

*Лемма 4* (см. [1, предложения 4.3.8 и 4.6.1]). Пусть  $B$  – кольцо и  $D$  – множество левых делителей в кольце  $B$ . Обозначим через  $D^{-1}B$  классическое левое кольцо частных кольца  $B$  относительно множества  $D$ , а через  $Q_m(B)$  максимальное левое кольцо частных кольца  $B$ . Тогда существует инъективный гомоморфизм колец  $\varepsilon: D^{-1}B \rightarrow Q_m(B)$  такой, что  $\varepsilon(b) = b$  для всех элементов  $b \in B$  и  $\varepsilon(d^{-1}b) = \varepsilon(d^{-1})b$  для всех элементов  $b \in B$  и  $d \in D$ . Более того, кольца  $Q_m(B)$  и  $Q_m(D^{-1}B)$  изоморфны.

Определение расширенного центроида и связанные с ним вопросы могут быть найдены в работе [16].

*Теорема 1.* Расширенный центроид кольца  $S$  изоморфен расширенному центроиду кольца  $A\langle x, f \rangle$ .

*Доказательство.* Несложно проверить, что множество  $X = \{x^n: n \geq 0\}$  является множеством левых делителей в кольце  $S$ . Кроме того, в силу леммы 4, что  $A\langle x, f \rangle = X^{-1}S$  – классическое левое кольцо частных кольца  $S$  (см. [14]). По лемме 4 максимальные левые кольца частных колец  $S$  и  $A\langle x, f \rangle$  изоморфны. Следовательно, расширенные центроиды этих колец, являющиеся центрами их максимальных колец частных, также изоморфны.

Будем говорить, что кольцо  $R$  удовлетворяет условию  $F$ -стабильности для левых аннуляторов, если для каждого  $F$ -инвариантного идеала  $I$  этого кольца и каждого положительного целого числа  $n$  выполняется равенство  $\ell_R(I) = \ell_R(F^n(I))$ .

*Теорема 2.* Предположим, что кольцо  $R$  является  $F$ -первичным и удовлетворяет условию  $F$ -стабильности для левых аннуляторов.

Тогда:

- 1)  $\ell_R(I) = 0$  для любого ненулевого  $F$ -инвариантного идеала  $I$  кольца  $R$ ;
- 2) расширение Оре  $S$  является первичным кольцом.

*Доказательство.* 1) Из условия  $F$ -стабильности следует эквивалентность следующих равенств:  $f(r)I = 0$ ;  $f(r)f(I) = 0$ ;  $rl = 0$ . Поэтому  $\ell_R(I)$  оказывается  $F$ -идеалом кольца  $R$ .

2) Пусть  $I$  – ненулевой идеал кольца  $S$ . Обозначим через  $I_0$  множества старших коэффициентов этого идеала. Так

$$x(r_0x^n + r_1x^{n-1} + \dots + r_n) = F(r_0)x^{n+1} + F(r_1)x^n + \dots + F(r_n)x,$$

то  $I_0$  является, очевидно, ненулевым левым  $F$ -инвариантным идеалом кольца  $R$ .

Отсюда,  $\ell_R(I_0) = \ell_R(I_0R) = 0$ . Пусть  $p = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n \in S$ ,  $p_0 \neq 0$

Тогда из условия  $pI = 0$  вытекает, что  $p_0x^nI_0 = p_0F^n(I_0)x^n = 0$  и, следовательно,  $p_0 \in \ell_R(F^n(I_0)) = \ell_R(I_0) = 0$  в силу условия  $F$ -стабильности. Полученное противоречие показывает, что  $pI = 0$  для любого ненулевого многочлена  $p \in S$  и любого ненулевого идеала  $I$  кольца  $S$ , то есть кольцо  $S$  первично.

Результаты данной работы могут быть использованы в учебном процессе (см. [15]).

### Список литературы

1. Ламбек И. Кольца и модули. – М.: Факториал Прес. – 2005. –288 стр.
2. Мочалина Е.П. Об одном критерии аналитической продолжимости функции  $CC$  отрезка // Успехи математических наук.– 2003.– т.58, №6. – С. 161-162.
3. Мочалина Е.П. Аналитическая продолжимость функций и рациональные приближения в некоторых пространствах//диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2006, 105 стр.
4. Мочалина Е.П., Вячеславов Н.С. Рациональные приближения функций типа маркова-стильеса в пространствах ХАРДИ  $HP$ ,  $0 < p \leq \infty$ //Вестник Московского университета. Серия 1: математика. Механика. – 2008, №4. – С. 3–13

5. Мочалина Е.П., Иванкова Г.В., Маслякова И.Н., Татарников О.В. Совместное оценивание уровня подготовки и сложности задания//Образование, наука и экономика в вузах и школах. интеграция в международное образовательное пространство. Труды международной научной конференции. – 2015. – С 147-152.
6. Мушруб В.А. Критерий полупростоты кольца косых многочленов// Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1. № 3. С. 701 –709.
7. Мушруб В.А. О нильпотентности подколец косых групповых колец// Фундаментальная и прикладная математика. — 1996. — Т. 2, № 4. — С. 1227–1233.
8. Мушруб В.А. О размерности Голди расширений Ore со многими переменными//Фундаментальная и прикладная математика. — 2001. — Т. 7, №4 — С. 1107–1121.
9. Мушруб В.А. Эндоморфизмы и радикалы колец: Автореф. дис. канд. физ-мат. наук. — М., 1992. — 11 с.
10. Мушруб В.А. Эндоморфизмы и радикалы колец: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук,. — М., 1992. — 158 с.
11. Мушруб В.А., Сухорукова И.В., Беляев А.А., Павловский В.В. Об инвариантности строго наследственных радикалов относительно эндоморфизмов// Инновации и инвестиции. — 2016, № 4. — С. 150-154.
12. Пчелинцев С.В., Гришин А.В., Красильников А.Н., Мушруб В.А. Тожества алгебраических объектов // Отчет о НИР № 97-01-00785 (Российский фонд фундаментальных исследований).
13. Сухорукова И., Мушруб В. The Jacobson radical and ring endomorphisms // Уральский научный вестник. — 2016. — Т. 4. — С. 155-164.
14. Туганбаев А.А. Теория колец. Арифметические кольца и модули. – М.: МЦНМО, 2009. – 472 с.
15. Maslyakova I., Mochalina E., Tatarnikov O., Ivankova G. Model of the recursive estimation of the level of knowledge of the student// Менеджмент и бизнес-администрирование. – 2015, № 3. – с. 71-76
16. Mushrub V.A. Extended centroid of a ring of skew polynomials// Russian Mathematical Surveys. – 1997. – Т. 52. – С. 414.
17. Mushrub V. A., Vybornova I.I., Ivankova G. V., Mochalina E. P. Bijective extensions of endomorphisms and essential right ideals. IV Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии естественных и математических наук», г. Ростов-на-Дону. – Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции. Инновационный центр развития образования и науки. – 2017.
18. Mushrub V.A., Sukhorukova I.V., Mochlina E. P., Ivankova G.V. Some properties of the lattice of f-closed right ideals.// В печати.
19. Mushrub V.A., Sukhorukova I.V., Mochlina E. P., Ivankova G.V. On f-prime rings and their f-rings of quotients// В печати.

## **СЕКЦИЯ №7.**

### **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.07)**

## **СЕКЦИЯ №8.**

### **ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.09)**

### **МЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.00)**

## **СЕКЦИЯ №9.**

### **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.01)**

**СЕКЦИЯ №10.  
МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА  
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.04)**

**СЕКЦИЯ №11.  
МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.05)**

**СЕКЦИЯ №12.  
ДИНАМИКА, ПРОЧНОСТЬ МАШИН, ПРИБОРОВ И АППАРАТУРЫ  
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.06)**

**К ВОПРОСУ О КОРРЕКТНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ  
ДЛЯ МОНИТОРИНГА, АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАБОТЫ  
КРИТИЧНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**Щербаков А.Ю.**

главный научный сотрудник

Федеральный исследовательский центр РАН «Информатика и управление» (ФИЦ ИУ РАН),  
г. Москва

В настоящее время для мониторинга и анализа работы сложных технических систем широко используются статистические методы, оценивающие отклонение критичных параметров системы от некоторых эмпирически или априорно заданных «нормальных» состояний. При этом полагают, что изменение контролируемых в технической системе параметров подчинено некоторому случайному процессу, однако предположения о виде и структуре случайного процесса, его параметрах, доверительном интервале, ошибках первого и второго рода строятся в предположении того, что анализируемые случайные процессы являются гауссовскими (имеющими нормальное распределение).

Широкое распространение использования нормального закона распределения в природе и технике объясняется тем, что *при суммировании достаточно большого числа независимых или слабо зависимых случайных величин распределение суммы близко к нормальному при любом распределении отдельных слагаемых.*

Это положение, сформулированное в 1901 г. А.М. Ляпуновым, получило название *центральной предельной теоремы.*

Однако на практике предположение о «нормальности» закона распределения контролируемых величин выполняется редко. В первую очередь это связано с зависимостью параметров друг от друга, поскольку физически техническая система представляет собой совокупность взаимосвязанных и взаимозависимых процессов, объединенных к тому же системами автоматического или автоматизированного регулирования.

К сожалению, в настоящее время в методологии мониторинга технических систем наметился ошибочный подход, связанный с некорректным использованием модели случайного процесса. Так, статья [5], содержит принципиальную методическую и теоретическую ошибку, связанную с использованием спекулятивной (ложной) исходной модели случайного процесса и вытекающими из нее ложными оценками параметров системы мониторинга.

Статистический критерий Хотеллинга ( $T_2$ ), рекомендуемый и рассмотренный в [5] не является единственно возможным и оптимальным для оценки состояния технических систем. В [1] подробно рассмотрены критерий Хотеллинга [Anderson, 2003], многомерный ранговый критерий (обобщение рангового критерия Вилкоксона на многомерный случай) [Puri, Sen, 1971] и ядерный критерий Крамера [Baringhaus, Franz, 2004]. При этом в [1] отмечено, что критерий Хотеллинга и ранговый критерий имеют мощность, близкую к нулевой, поскольку они основаны на статистиках, реагирующих только на альтернативы сдвига распределений. Критерий Крамера имеет несколько большую мощность чем

предложенный в [1] критерий, однако близкая к единице мощность предложенного критерия достигается и в этом случае. В статье [1] также особо подчеркнуто, что выводы указанных критериев верны **только в предположении гауссовских распределений**.

Для иллюстрации сформулированных положений проведем краткий анализ данных о работе Белоярской АЭС с целью уточнения моделей случайных процессов и апробации методов анализа функций.

Имеется набор данных, описывающий систему, в текстовом виде (429 датчиков (сенсоров) с разнородными показаниями).

Для тестирования использовались следующие датчики

Идентификатор	Нач. знач	Ед. изм.	Параметр
4LBA10CT001_XQ01	323	°С	ТЕМПЕР СВЕЖ ПАРА 11 0-600 ГРАД
4LBA20CT001_XQ01	328	°С	ТЕМПЕР СВЕЖ ПАРА 23 0-600 ГРАД
4LBA30CT001_XQ01	327	°С	ТЕМПЕР СВЕЖ ПАРА 12 0-600 ГРАД
4LBA40CT001_XQ01	340	°С	ТЕМПЕР СВЕЖ ПАРА 24 0-600 ГРАД
4LBC10CP001_XQ01	-	МПа	Р ПАРА ЗА ЦВД 11 0-1.6 МПА
4LBC10CP002_XQ01	-	МПа	Р ПАРА ЗА ЦВД 12 0-1.6 МПА
4LBC20CP001_XQ01	-	МПа	Р ПАРА ЗА ЦВД 23 0-1.6 МПА
4LBC20CP002_XQ01	-	МПа	Р ПАРА ЗА ЦВД 24 0-1.6 МПА
4MAA01CP001_XQ01	0.026	МПа	Р-Р Ф СК ВД 0 0.6 МПА
4MAA01CT011_XQ01	329	°С	Т МЕТ ПОВ СК ВД 0 600 ГРАД

Для отладки алгоритмов и получения данных о характере случайных процессов используются 10 указанных в таблице датчиков и период времени от 01.10.16 до 10.10.16, датчики в файла анализа пронумерованы соответственно таблице от 1 до 10.

С использованием универсальной структуры хранения данных, разработано ПО преобразования выгруженных текстовых файлов к единому формату, модуль rotor.exe, который в качестве аргумента использует имя текстового файла.

В ходе работы модуля получена первичная индексированная структур хранения данных (Linked BigData), которая позволяет выбирать любые совокупности данных из базы уже в цифровом виде с максимальной скоростью.

Далее проведена разработка ПО анализа функций (экстремумы, производные, гистограммы и матрицы переходных вероятностей), разработан модуль afun.

Цель – проанализировать полученные функции с точки зрения классического математического анализа. Это позволяет построить полную математическую модель системы в непрерывных функциях, а также получить перечень критичных событий (максимумы, периоды максимального роста/убывания и т.д.).

ПО представляет собой исполняемый модуль, вычисляющий в числе прочих значений, гистограммы функций и матрицу переходных вероятностей (условную вероятность события перехода в следующий момент дискретного времени параметра в состояние  $j$  при условии нахождения в текущий момент в состоянии  $i$ ), дискретные производные, максимумы и минимумы и выгружающий их в базу данных, а также фиксирующий моменты времени наступления заданных событий.

Принципиально новым в данном случае является построение гистограммы функции и ее дискретной производной, которая является «портретом» работы подсистемы за изучаемый период времени (для дискретной производной распределяет скорости роста и убывания функций по интервалам).

Проиллюстрируем результат работы системы для сенсоров 1, 2, 5 и 10.

Сенсор №1

Function histogramm:

FunInterval:01 < 3 >

FunInterval:02 < 56 >

FunInterval:03 < 38 >

FunInterval:04 < 3 >

FunInterval:05 < 24 >

FunInterval:06 < 10 >

FunInterval:07 < 10 >

FunInterval:08 < 42 >

FunInterval:09 < 0 >  
FunInterval:10 < 1252 >  
0002 0000 0001 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000  
0001 0055 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0001 0036 0001 0000 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0002 0001 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0023 0001 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0000 0009 0001 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0009 0001 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0041 0000 0001  
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 1252

Сенсop №2

Function histogramm:

FunInterval:01 < 42 >  
FunInterval:02 < 49 >  
FunInterval:03 < 5 >  
FunInterval:04 < 23 >  
FunInterval:05 < 9 >  
FunInterval:06 < 8 >  
FunInterval:07 < 15 >  
FunInterval:08 < 47 >  
FunInterval:09 < 0 >  
FunInterval:10 < 1240 >

0041 0001 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000  
0001 0047 0001 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0001 0003 0001 0000 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0022 0001 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0008 0001 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0000 0007 0001 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0014 0001 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0046 0000 0001  
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 1240

Сенсop №5

Function histogramm:

FunInterval:01 < 120 >  
FunInterval:02 < 9 >  
FunInterval:03 < 8 >  
FunInterval:04 < 15 >  
FunInterval:05 < 35 >  
FunInterval:06 < 40 >  
FunInterval:07 < 30 >  
FunInterval:08 < 41 >  
FunInterval:09 < 0 >  
FunInterval:10 < 1140 >

0119 0001 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0008 0001 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0007 0001 0000 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0014 0001 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0034 0001 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0000 0039 0001 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0029 0001 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0040 0000 0001

0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 1140

Производная для сенсора №5

Derivative histogramm:

Interval:01 < 1 >

Interval:02 < 0 >

Interval:03 < 0 >

Interval:04 < 78 >

Interval:05 < 1315 >

Interval:06 < 43 >

Interval:07 < 0 >

Interval:08 < 0 >

Interval:09 < 0 >

Interval:10 < 1 >

Сенсор №10

Function histogramm:

FunInterval:01 < 38 >

FunInterval:02 < 62 >

FunInterval:03 < 20 >

FunInterval:04 < 8 >

FunInterval:05 < 9 >

FunInterval:06 < 8 >

FunInterval:07 < 14 >

FunInterval:08 < 41 >

FunInterval:09 < 0 >

FunInterval:10 < 1238 >

0037 0001 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000  
0001 0060 0001 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0001 0018 0001 0000 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0007 0001 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0008 0001 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0000 0007 0001 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0013 0001 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0040 0000 0001  
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000  
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 1238

Производная для сенсора №10

Derivative histogramm:

Interval:01 < 4 >

Interval:02 < 57 >

Interval:03 < 1261 >

Interval:04 < 65 >

Interval:05 < 25 >

Interval:06 < 16 >

Interval:07 < 4 >

Interval:08 < 4 >

Interval:09 < 1 >

Interval:10 < 2 >

Даже приблизительный визуальный анализ гистограмм и ненормированных матриц переходных вероятностей для выделенных сенсоров позволяет говорить о том, что закон распределения не совпадает с нормальным, об условно нормальном распределении можно говорить только для производных функций. Кроме того, анализируемые величины сильно зависимы (коррелированы) между собой и даже в грубом приближении не могут считаться независимыми, что практически **опровергает** применяемые в [5] статистические критерии.

В целом получаемая информация уже сейчас может использоваться для глубокой оптимизации работы системы в целом.

Гистограмма функций и дискретных производных позволяет гипотетически говорить о приблизительно марковском процессе изменения параметров, что позволит уточнить вероятностную модель функционирования системы.

#### **Выводы**

Необходимо срочное изменение парадигмы мониторинга и анализа, поскольку применению спекулятивной модели случайного процесса [5] и вытекающих из нее ложных статистических критериев может привести к грубой ошибке в контроле работы критичной технической системы и крупной техногенной аварии или даже катастрофе.

Пути решения указанных проблем связаны с глубоким анализом информации с использованием классических инструментов функционального анализа и построением близкой к реальности адекватной модели случайных процессов (по-видимому, на основе модели марковского процесса).

#### **Список литературы**

1. С. П. Чистяков О НОВОМ МНОГОМЕРНОМ СТАТИСТИЧЕСКОМ КРИТЕРИИ ОДНОРОДНОСТИ ДВУХ ВЫБОРОК //Труды Карельского научного центра РАН, № 3. 2010. С. 93–97.
2. Anderson T. W. An introduction to multivariate analysis. New Jersey: Wiley, 2003. 453 p.
3. Baringhaus L., Franz C. On a new multivariate two-sample test // Journal of Multivariate Analysis. 2004. Vol. 88. P. 190–206.
4. Puri M. L., Sen P. K. Nonparametric Methods in Multivariate Analysis. New York: Wiley, 1971. 342 p.
5. Громак Е.В., Наумов С.А. Шишов В.А. Система удаленного мониторинга и прогностики АО «Ротек» как элемент энергетической безопасности – М.: НРЭ, №6, 2016 – с.36-46.

#### **СЕКЦИЯ №13.**

##### **БИОМЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.08)**

##### **АСТРОНОМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.00)**

#### **СЕКЦИЯ №14.**

##### **АСТРОМЕТРИЯ И НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.01)**

#### **СЕКЦИЯ №15.**

##### **АСТРОФИЗИКА И ЗВЕЗДНАЯ АСТРОНОМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.02)**

#### **СЕКЦИЯ №16.**

##### **ФИЗИКА СОЛНЦА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.03)**

#### **СЕКЦИЯ №17.**

##### **ПЛАНЕТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.04)**

##### **ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.00)**

**СЕКЦИЯ №18.  
ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ  
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.01)**

**СЕКЦИЯ №19.  
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.02)**

**СЕКЦИЯ №20.  
РАДИОФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.03)**

**СЕКЦИЯ №21.  
ФИЗИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.04)**

**СЕКЦИЯ №22.  
ОПТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.05)**

**СЕКЦИЯ №23.  
АКУСТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.06)**

**СЕКЦИЯ №24.  
ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.07)**

**СЕКЦИЯ №25.  
ФИЗИКА ПЛАЗМЫ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.08)**

**СЕКЦИЯ №26.  
ФИЗИКА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.09)**

**СЕКЦИЯ №27.  
ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.10)**

**СЕКЦИЯ №28.  
ФИЗИКА МАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.11)**

**СЕКЦИЯ №29.  
ЭЛЕКТРОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ  
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.13)**

**СЕКЦИЯ №30.  
ТЕПЛОФИЗИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ТЕПЛОТЕХНИКА  
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.14)**

**СЕКЦИЯ №31.  
ФИЗИКА И ТЕХНОЛОГИЯ НАНОСТРУКТУР,  
АТОМНАЯ И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.15)**

**СЕКЦИЯ №32.  
ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ  
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.16)**

**СЕКЦИЯ №33.  
ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ГОРЕНИЕ И ВЗРЫВ, ФИЗИКА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ  
СОСТОЯНИЙ ВЕЩЕСТВА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.17)**

**СЕКЦИЯ №34.  
КРИСТАЛЛОГРАФИЯ, ФИЗИКА КРИСТАЛЛОВ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.18)**

**СЕКЦИЯ №35.  
ФИЗИКА ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ И УСКОРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.20)**

**СЕКЦИЯ №36.  
ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.21)**

**СЕКЦИЯ №37.  
ФИЗИКА ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.23)**

**ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.00)**

**СЕКЦИЯ №38.  
НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.01)**

**СЕКЦИЯ №39.  
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.02)**

**СЕКЦИЯ №40.  
ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.03)**

**СЕКЦИЯ №41.  
ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.04)**

**ПОЛУЧЕНИЕ ДИАГРАММЫ СОСТОЯНИЯ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ  
ИЗ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛЕТУЧЕГО ВЕЩЕСТВА**

**Поляченко О.Г., Дудкина Е.Н., Болотова А.Ю., Парфенюк Ю.В., Поляченко Л.Д.**

Могилевский государственный университет продовольствия Беларусь, г. Могилев

**Аннотация**

Исследованы методики получения диаграмм состояния однокомпонентной системы с использованием данных по давлению насыщенного пара, плотности жидкости и стандартных

термодинамических характеристик летучего вещества. В качестве примера представлена полученная диаграмма состояния этанола.

**Ключевые слова:** диаграмма состояния однокомпонентных систем, давление насыщенного пара, стандартные термодинамические характеристики, растворитель, этанол.

#### **Abstract**

Methods are studied for obtaining phase diagrams of one-component systems using the data for saturation vapour pressure, liquid density, and standard thermodynamic properties of volatile substances. As an example, the resulting state diagram of ethanol is presented.

**Keywords:** phase diagram of one-component system, vapour pressure, standard thermodynamic characteristics, solvent, ethanol.

#### **Введение**

При изучении диаграмм растворимости веществ в органических растворителях в широких интервалах температур и давлений может возникнуть необходимость иметь хотя бы приблизительную информацию о диаграмме состояния однокомпонентной системы – растворителя. Однако такая информация в литературе часто отсутствует или трудно доступна. Между тем эта диаграмма может быть легко получена из имеющихся для большинства растворителей данных по давлению насыщенного пара, плотности жидкости и стандартных термодинамических характеристик.

Подобные исследования проводятся в Могилевском государственном университете продовольствия наиболее подготовленными студентами младших курсов в рамках учебно-исследовательской работы по физической и коллоидной химии. В настоящей статье представлена в качестве примера полученная диаграмма состояния этанола и излагается методика ее построения.

#### **Методика расчетов**

Как известно [1], диаграммы состояния однокомпонентных систем в обычных условиях являются дивариантными и могут быть изображены на плоскости в координатах  $P - T$ , поскольку, по правилу фаз, при наличии одной фазы число степеней свободы в такой системе равно:  $f = K - \Phi + 2 = 1 - 1 + 2 = 2$ . В простейшем случае они представляют собой три линии моновариантных фазовых равновесий (сублимации, испарения и плавления), пересекающиеся в тройной точке (рис. 1).

Для большинства растворителей в литературе имеются необходимые для расчетов величины стандартной энтальпии образования  $\Delta_f H^\circ_{298}$  и энтропии  $S^\circ_{298}$  вещества в жидком и газообразном состоянии, температура плавления  $T^\circ_{\text{плавл}}$  и теплота плавления  $\Delta H^\circ_{\text{плавл}}$ . Поэтому на диаграмме состояния линии испарения и сублимации вблизи тройной точки  $T_{\text{тр}}$  могут быть получены с использованием следующих термодинамических соотношений:

$$\text{испарение:} \quad \ln P/P^\circ = \Delta S^\circ_{\text{исп}}(T_{\text{тр}})/R - \Delta H^\circ_{\text{исп}}(T_{\text{тр}})/RT, \quad (1)$$

$$\text{сублимация:} \quad \ln P/P^\circ = \Delta S^\circ_{\text{субл}}(T_{\text{тр}})/R - \Delta H^\circ_{\text{субл}}(T_{\text{тр}})/RT, \quad (2)$$

где  $P^\circ$  – стандартное давление, а  $P/P^\circ$  – термодинамическое безразмерное давление, численно равное давлению в атмосферах; величины  $\Delta S^\circ$  и  $\Delta H^\circ$  испарения и сублимации получены для температуры тройной точки. Очень многие органические растворители имеют тройную точку при давлениях, много меньших 1 атм, поэтому в этой области температур пар подчиняется законам идеальных газов, а объемом жидкой фазы можно пренебречь даже при необходимости вычислений повышенной точности. Обычно можно также пренебречь небольшим отличием температуры тройной точки  $T_{\text{тр}}$  от температуры плавления при стандартном давлении  $T^\circ_{\text{плавл}}$ .

Входящие в уравнения (1) и (2) термодинамические характеристики испарения и сублимации при  $T_{\text{тр}}$  рассчитываются по стандартным термодинамическим данным с использованием уравнений (3 – 8). Все приведенные ниже численные расчеты выполнены на примере этанола. При этом использованы термодинамические данные справочника [2], которые представлены в табл. 1. Эти данные несколько отличаются от приведенных в Химической энциклопедии [3], особенно сильно – для теплоемкости пара (55,1 Дж/моль·К) и для теплоты плавления (4,81 кДж/моль).

Таблица 1 – Использованные при расчетах свойства этанола [2\*]

Свойство:	$\Delta_f H^\circ_{298}$ кДж/моль	$S^\circ_{298}$ Дж/моль·К	$C^\circ_{p,298}$ Дж/моль·К	$T^\circ_{\text{плавл}}$ , К	$\Delta H^\circ_{\text{павл}}$ кДж/моль
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH (жидк.)	- 276,9 ± 0,3	161,0 ± 0,2	112,0 ± 0,4	158,95	5,0
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH (газ)	- 234,6 ± 0,3	282,4 ± 2,1	65,3 ± 0,8	–	–

\* Данные справочника пересчитаны с учетом коэффициента 4,184 Дж/кал и округлены с точностью до 0,1 соответствующих единиц измерения.

С использованием данных табл. 1 получаем следующие результаты.

**Испарение:**

$$\Delta H^\circ_{\text{исп}}(298) = \Delta_f H^\circ_{298}(\text{пар}) - \Delta_f H^\circ_{298}(\text{жидк.}) = 42,3 \text{ (кДж/моль)} \quad (3)$$

(38,7 кДж/моль [3]).

$$\Delta S^\circ_{\text{исп}}(298) = S^\circ_{298}(\text{пар}) - S^\circ_{298}(\text{жидк.}) = 121,4 \text{ (Дж/моль·К)}. \quad (4)$$

Для использования уравнений (1) и (2) необходимо пересчитать полученные величины энтальпии и энтропии испарения на температуру плавления этанола 158,95 К (-114,2 °С):

$$\Delta H^\circ_{\text{исп}}(159) = \Delta H^\circ_{\text{исп}}(298) - \Delta C^\circ_p \cdot (298,15 - T^\circ_{\text{плавл}}). \quad (5)$$

Для этого находим величину  $\Delta C^\circ_p$  процесса испарения, равную, по данным табл. 1,  $65,3 - 112,0 = -46,7$  Дж/моль·К. Хотя теплоемкость и жидкости, и пара заметно изменяются с температурой, величина  $\Delta C^\circ_p$  процессов парообразования обычно слабо зависит от температуры, поэтому во всех наших расчетах величина  $\Delta C^\circ_p$  принимается постоянной и равной  $\Delta C^\circ_{p,298}$ .

Теперь находим по уравнению (5):

$\Delta H^\circ_{\text{исп}}(159) = 42300 + 46,7 \cdot 139,2 = 48800$  (Дж/моль). Аналогичным путем находим энтропию испарения при температуре плавления:

$$\begin{aligned} \Delta S^\circ_{\text{исп}}(159) &= \Delta S^\circ_{\text{исп}}(298) - \Delta C^\circ_p \cdot \ln(298,15 / T^\circ_{\text{плавл}}) = \\ &= 121,4 + 46,7 \cdot \ln 1,876 = 150,8 \text{ (Дж/моль·К)}. \end{aligned} \quad (6)$$

**Сублимация:**

$$\Delta H^\circ_{\text{субл}}(159) = \Delta H^\circ_{\text{исп}}(159) + \Delta H^\circ_{\text{павл}} = 48800 + 5000 = 53800 \text{ (Дж/моль)}. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta S^\circ_{\text{субл}}(159) &= \Delta S^\circ_{\text{исп}}(159) + \Delta S^\circ_{\text{павл}} = \Delta S^\circ_{\text{исп}}(159) + \Delta H^\circ_{\text{павл}} / T^\circ_{\text{плавл}} = \\ &= 150,8 + 5000 / 159 = 182,2 \text{ (Дж/моль·К)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Итак, мы получили все необходимые термодинамические величины, чтобы рассчитать по уравнениям (1) и (2) линии (испарения и сублимации) на диаграмме состояния однокомпонентной системы вблизи тройной точки.

В зависимости от наличия или отсутствия тех или иных термодинамических данных для данного растворителя эта задача может решаться несколько различающимися способами. В случае отсутствия каких-либо требуемых для расчетов сведений о свойствах рассматриваемого растворителя и необходимости их приближенной оценки большую помощь могут оказать работы М. Х. Карапетянца [4] и В. А. Киреева [5].

Наши студенты в рамках учебно-исследовательской работы решают эту задачу, не используя стандартные термодинамические характеристики растворителя, а исходя из данных по температурной зависимости его давления насыщенного пара. Поэтому ниже мы подробнее рассмотрим получение результатов именно из исходных тензиметрических данных.

**Результаты и их обсуждение**

Исходные данные по температурной зависимости давления насыщенного пара этанола были определены на компьютере по разработанной на кафедре химии МГУП специальной программе, моделирующей тензиметрические «измерения». Эти данные и результаты их математической обработки на ЭВМ методом наименьших квадратов представлены в табл. 2 и 3.

Таблица 2 – Исходные тензиметрические данные и результаты их обработки

t, °С	T, К	1000/T	P, мм рт. ст.	lnP/P°	P, мм рт. ст., расчет по (9)
-10	263,15	3,8001	5,7	-4,8911	5,7
0	273,15	3,6610	11,7	-4,1754	11,7
10	283,15	3,5317	22,7	-3,5118	22,7
20	293,15	3,4112	42,1	-2,8930	42,2

30	303,15	3,2987	75,1	-2,3152	75,1
40	313,15	3,1934	128,9	-1,7740	129,1
50	323,15	3,0945	214,2	-1,2665	214,4
60	333,15	3,0017	345,1	-0,7895	345,4
70	343,15	2,9142	540,8	-0,3402	541,4
78	351,15	2,8478	760,6	0,0008	761,3

Результаты расчетов коэффициентов линейного уравнения  $\ln P/P^\circ = A - B/T$  и термодинамических характеристик процесса испарения при средней температуре измерений представлены в табл. 3.

Таблица 3 – Термодинамические характеристики испарения этанола

T среднее, К	A	B	$\Delta H^\circ_T$ , Дж/моль	$\Delta S^\circ_T$ , Дж/моль·К
305,3	14,628	- 5136	42705	121,62

Итак, в интервале температур, приведенном в табл. 2, давление насыщенного пара может быть вычислено по линейному уравнению с коэффициентами, приведенными в табл. 3:

$$\ln P/P^\circ = 14,628 - 5136/T. \quad (9)$$

В последнем столбце табл. 2 представлены результаты расчетов по этому уравнению, которые позволяют оценить его точность – отличия от исходных данных находятся на уровне 0,1 относит. %.

Для того, чтобы сравнить полученные термодинамические характеристики испарения с рассчитанными по термодинамическим таблицам, необходимо пересчитать их к стандартной температуре 298,15 К по уравнениям типа 5 и 6:

$$\begin{aligned} \Delta H^\circ_{\text{исп}}(298) &= \Delta H^\circ_{\text{исп}}(305) - \Delta C^\circ_p \cdot (305,3 - 298,15) = \\ &= 42,7 + 0,3 = 43,0 \text{ (кДж/моль)}, \\ \Delta S^\circ_{\text{исп}}(298) &= \Delta S^\circ_{\text{исп}}(305) - \Delta C^\circ_p \cdot \ln(305,3/298,15) = \\ &= 121,6 + 1,1 = 122,7 \text{ (Дж/моль·К)}. \end{aligned}$$

Таким образом, полученные путем обработки тензиметрических данных (табл. 2) величины энтальпии и энтропии испарения вполне согласуются с найденными выше по стандартным термодинамическим таблицам (42,3 кДж/моль и 121,4 Дж/моль·К), несмотря на то, что при обработке данных табл.2 было использовано простейшее, линейное уравнение.

Было бы интересно сравнить полученную величину энтропии испарения с константой Трутона (88 Дж/моль·К – при давлении 1 атм). Для этого находим энтропию испарения при температуре кипения этанола 78,32 °С (351,47 К [2]):

$$\begin{aligned} \Delta S^\circ_{\text{исп}}(351) &= \Delta S^\circ_{\text{исп}}(305) - 46,7 \cdot \ln(351,47/305,3) = \\ &= 121,62 - 6,58 = 115,0 \text{ Дж/моль·К}. \end{aligned}$$

Найденная величина  $\Delta S^\circ_{\text{исп}}$  этанола существенно превышает величину константы Трутона, характерную для неполярных жидкостей. Это подтверждает необходимость учета полярности молекул при оценке величины  $\Delta S^\circ_{\text{исп}}$  растворителя [4, 5], если экспериментальные данные по его энтропии отсутствуют.

Энтальпия испарения этанола при его стандартной температуре кипения равна:  $\Delta H^\circ_{\text{исп}}(351) = \Delta H^\circ_{\text{исп}}(305) - \Delta C^\circ_p \cdot (351,47 - 305,3) = 40,5$  (кДж/моль).

С учетом возможной погрешности за счет использования постоянной величины  $\Delta C^\circ_p$  ( $\pm 0,5 - 1$  кДж/моль) это значение вполне согласуется с табличной величиной ( $39,3 \pm 0,4$  кДж/моль [2]).

Полученные результаты были пересчитаны по методике, изложенной выше, на температуру плавления этанола (159 К) и определены величины энтальпии и энтропии сублимации при этой температуре. Было получено:

$$\begin{aligned} \text{испарение: } \Delta H^\circ_{\text{исп}}(159) &= \Delta H^\circ_{\text{исп}}(305) - \Delta C^\circ_p \cdot (305,3 - T^\circ_{\text{плавл}}) = \\ &= 42705 + 46,7 \cdot (305,3 - 158,95) = 42705 + 6835 = 49540 \text{ (Дж/моль)}, \\ \Delta S^\circ_{\text{исп}}(159) &= \Delta S^\circ_{\text{исп}}(305) - \Delta C^\circ_p \cdot \ln(305,3/ T^\circ_{\text{плавл}}) = \\ &= 121,62 + 46,7 \cdot \ln(305,3/158,95) = 121,62 + 30,48 = 152,1 \text{ (Дж/моль·К)}, \\ \text{сублимация: } \Delta H^\circ_{\text{субл}}(159) &= \Delta H^\circ_{\text{исп}}(159) + \Delta H^\circ_{\text{павл}} = \\ &= 49540 + 5000 = 54540 \text{ (Дж/моль)}, \\ \Delta S^\circ_{\text{субл}}(159) &= \Delta S^\circ_{\text{исп}}(159) + \Delta S^\circ_{\text{павл}} = \Delta S^\circ_{\text{исп}}(159) + \Delta H^\circ_{\text{павл}}/ T^\circ_{\text{плавл}} = \\ &= 152,10 + 31,46 = 183,6 \text{ (Дж/моль·К)}. \end{aligned}$$

Наконец, по уравнениям (1) и (2) получаем уравнения двух линий (испарения и сублимации) на диаграмме состояния однокомпонентной системы вблизи тройной точки:

испарение:  $\ln P/P^\circ = \Delta S^\circ_{\text{исп}}(T_{\text{тр}})/R - \Delta H^\circ_{\text{исп}}(T_{\text{тр}})/RT =$   
 $= 152,1/8,31441 - 49540/(8,31441 \cdot T) = 18,29 - 5960/T,$  (10)

сублимация:  $\ln P/P^\circ = \Delta S^\circ_{\text{субл}}(T_{\text{тр}})/R - \Delta H^\circ_{\text{субл}}(T_{\text{тр}})/RT =$   
 $= 183,6/8,31441 - 54540/(8,31441 \cdot T) = 22,08 - 6560/T.$  (11)

Необходимо проверить правильность коэффициентов полученных уравнений (10) и (11) – давление насыщенного пара в точке плавления (тройной точке) должно быть одинаковым как для испарения, так и для сублимации. Получаем:

испарение:  $\ln P/P^\circ = 18,29 - 5960/158,95 = -19,206, P = 4,56 \cdot 10^{-9}$  атм.

сублимация:  $\ln P/P^\circ = 22,08 - 6560/158,95 = -19,191, P = 4,63 \cdot 10^{-9}$  атм.

Обе величины, действительно, практически совпадают, небольшое различие связано с округлением коэффициентов уравнений (10) и (11).

Полученная в Excel с использованием уравнений (10) и (11) диаграмма состояния этанола при низких давлениях представлена на рис. 1.

На рис. 1 по оси ординат отложено давление в пределах  $0 - 10 \cdot 10^{-9}$  атм. Малиновая линия соответствует сублимации, зеленая линия – испарению; они экстраполированы на несколько градусов, чтобы более отчетливо было видно изменение крутизны при переходе от одной линии к другой. Синяя линия соответствует плавлению, в данном диапазоне давлений она идет практически вертикально, т.к. для заметного изменения температуры плавления необходимо повысить давление на много атмосфер. Поэтому на рис. 2 представлена эта же диаграмма, но при более высоких давлениях (до 20 атм); в этом случае линия сублимации практически совпадает с осью абсцисс.

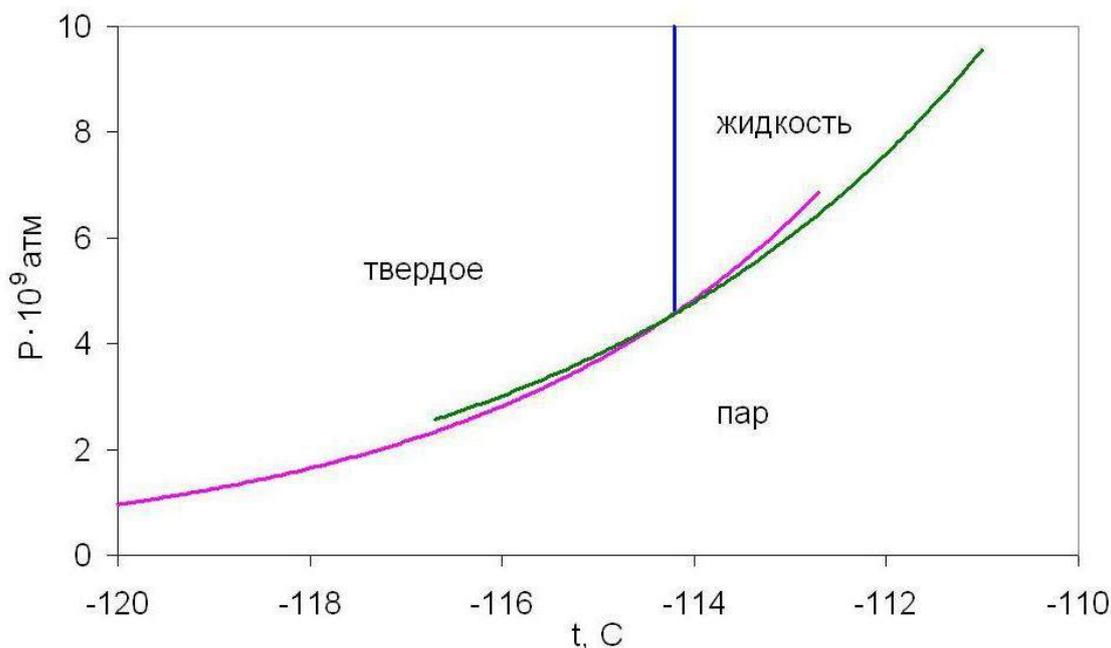


Рисунок 1 – Диаграмма состояния этанола при низких давлениях

При построении кривой плавления этанола в области высоких давлений насыщенного пара (рис. 2) использовалось уравнение Клаузиуса-Клапейрона

$$dP/dT = \Delta H_{\text{плавл}} / (T \cdot \Delta V_{\text{плавл}}). \quad (12)$$

При его интегрировании делались следующие упрощающие предположения:

- теплота плавления  $\Delta H_{\text{плавл}}$  (табл. 1) не зависит от давления и температуры;
- величина  $\Delta V_{\text{плавл}} = V_{\text{жидк}} - V_{\text{тв}}$  также постоянна и равна 2,04 мл/моль, как это дано в справочнике [6, с. 589] для давления 15000 атм;
- первоначально также предполагалось, что давление насыщенного пара дается уравнением (9) даже до величины 20 атм. Однако сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными по давлению насыщенного пара [6, с.678]) показало, что это приближение является слишком грубым – так при температуре 183,0 °С, когда давление пара должно быть равно 20 атм, ошибка вычислений близка к 50 %.

Поэтому мы попробовали ввести в уравнение (9) постоянную величину  $\Delta C_p^\circ$ , равную – 46,7 Дж/моль·К. Было получено более точное уравнение температурной зависимости давления насыщенного пара этанола:

$$\ln P/P^\circ = 52,379 - 6851/T - 5,617 \cdot \ln T, \quad (13)$$

которое дает в интервале давлений 1 – 20 атм относительную ошибку вычисления давления насыщенного пара на уровне 3 – 4 %, что достаточно для построения диаграммы на рис. 2. Удивительно, что даже при критической температуре 243,1 °С это уравнение дает не слишком большую ошибку около 12 %.

Из уравнения (12) в результате его интегрирования от температуры плавления до Т получаем уравнение линии плавления этанола:

$$\begin{aligned} P \text{ (Па)} &= ((\Delta H_{\text{плавл}}/\Delta V_{\text{плавл}}) \cdot \ln(T/158,95)) = \quad (14) \\ &= (5000 \text{ (Дж/моль)} / (2,04 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^3\text{/моль)})) \cdot (\ln T - 5,0686) = \\ &= 2,451 \cdot 10^9 \cdot \ln T - 1,2423 \cdot 10^{10}. \end{aligned}$$

При переходе к давлению в атмосферах получаем уравнение:

$$P \text{ (атм)} = 2,419 \cdot 10^4 \cdot \ln T - 1,226055 \cdot 10^5. \quad (15)$$

Наконец, температура плавления этанола при давлении Р может быть вычислена по итоговому уравнению:

$$\ln T = (P \text{ (атм)} + 1,226055 \cdot 10^5) / 2,419 \cdot 10^4 = 5,0684 + P \text{ (атм)} / 2,419 \cdot 10^4. \quad (16)$$

Если второе слагаемое в этом уравнении близко к нулю (тройная точка), то получаем температуру плавления этанола, равную 158,92 К и практически совпадающую с принятой в расчетах табличной величиной 158,95 К. Достижение точного совпадения возможно, но требует еще больше увеличить число значащих цифр в уравнениях (14) – (16). Вместо этого мы просто заменяем коэффициент 5,0684 в итоговом уравнении (16) на требуемую величину 5,0686. Теперь окончательное уравнение для зависимости температуры плавления этанола от давления (в том числе – от давления насыщенного пара) имеет вид:  $\ln T = 5,0686 + P \text{ (атм)} / 2,419 \cdot 10^4$ . (17)

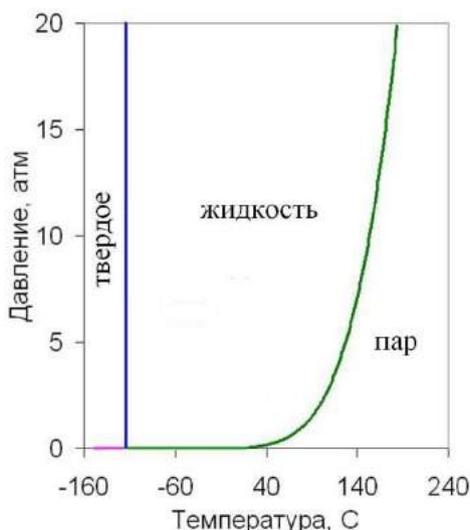


Рисунок 2 – Диаграмма состояния этанола при высоких давлениях. На рис. 2 максимальная величина давления насыщенного пара равна 20 атм, тогда по уравнению (17) получаем температуру плавления этанола 159,08 К, т.е она повысилась всего на 0,13 °. Таким образом, и на рис.2 кривая плавления этанола идет практически вертикально, как и на рис. 1.

Для значительного повышения температуры плавления этанола требуются очень высокие давления. Так, при давлении 15000 атм по уравнению (17) получаем температуру плавления, равную 22 °С (– 5 °С [6, с. 589]).

### Заключение

1. Проведен анализ возможностей построения диаграммы состояния однокомпонентной системы на основе термодинамических данных.
2. Построена диаграмма состояния однокомпонентной системы – этанола.

## Список литературы

1. Поляченко О.Г., Поляченко Л.Д. Физическая и коллоидная химия. Конспект лекций. Могилев: МГУП, 2008. – 196 с.
2. Термические константы веществ: Справочник в 10 вып. / Отв. ред. В. П. Глушко.– М.: Изд-во ВИНТИ АН СССР, 1965 – 1982.– Вып. 4.– 1970.– 510 с.
3. Химическая энциклопедия. В 5 т.: т. 5 / Редкол.: Зефирова Н.С. (гл. ред.) и др. М.: Большая Российская энцикл., 1998, - 783 с.
4. Карапетьянц М. Х. Методы сравнительного расчета физико-химических свойств. М.: Наука, 1965.– 404 с.
5. Киреев В. А. Методы практических расчетов в термодинамике химических реакций. М.: Химия, 1975.– 536 с.
6. Справочник химика: Т. 1 / Гл. ред. Б. П. Никольский.– Л.: Химия, 1971. – – 1072 с.

### **СЕКЦИЯ №42. ЭЛЕКТРОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.05)**

### **СЕКЦИЯ №43. ВЫСОКОМОЛЕКУЛЯРНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.06)**

### **СЕКЦИЯ №44. ХИМИЯ ЭЛЕМЕНТООРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.08)**

### **СЕКЦИЯ №45. ХИМИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.09)**

### **СЕКЦИЯ №46. БИООРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.10)**

### **СЕКЦИЯ №47. КОЛЛОИДНАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.11)**

### **СЕКЦИЯ №48. БИОНЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.12)**

### **СЕКЦИЯ №49. НЕФТЕХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.13)**

### **СЕКЦИЯ №50. РАДИОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.14)**

### **СЕКЦИЯ №51. КИНЕТИКА И КАТАЛИЗ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.15)**

**СЕКЦИЯ №52.  
МЕДИЦИНСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.16)**

**СЕКЦИЯ №53.  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ХИМИЯ  
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.17)**

**СЕКЦИЯ №54.  
ХИМИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.21)**

**БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.00.00)**

**ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ БИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.00)**

**СЕКЦИЯ №55.  
РАДИОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.01)**

**СЕКЦИЯ №56.  
БИОФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.02)**

**СЕКЦИЯ №57.  
МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.03)**

**СЕКЦИЯ №58.  
БИОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.04)**

**СЕКЦИЯ №59.  
ФИЗИОЛОГИЯ И БИОХИМИЯ РАСТЕНИЙ  
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.05)**

**СЕКЦИЯ №60.  
БИОТЕХНОЛОГИЯ (В ТОМ ЧИСЛЕ БИОНАНОТЕХНОЛОГИИ)  
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.06)**

**СЕКЦИЯ №61.  
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ГЕНЕТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.07)**

**СЕКЦИЯ №62.  
БИОИНЖЕНЕРИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.08)**

**СЕКЦИЯ №63.  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИОЛОГИЯ, БИОИНФОРМАТИКА  
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.09)**

**ОБЩАЯ БИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.00)**

**СЕКЦИЯ № 64**  
**БОТАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.01)**

**СТРУКТУРА ПОПУЛЯЦИЙ ЕЛИ В АРХАНГЕЛЬСКОЙ ОБЛАСТИ  
НА ОСНОВЕ 9-КЛАССНОЙ ГРАДАЦИИ ФЕНОТИПОВ**

**Попов П. П.**

Институт проблем освоения Севера СО РАН, г. Тюмень, РФ

Архангельская область располагается на севере европейской России и является одной из наиболее многолесных [2]. В лесном фонде ее более половины принадлежит еловым лесам, которые играют здесь большую социально-экономическую роль. Таксономическое положение ели в этом регионе довольно неопределенно, хотя в целом она входит в ареал ели сибирской (*Picea obovata* Ledeb.). По территории области с юго-востока на северо-запад протекает одна из крупных рек европейской России – Северная Двина, которая с середины XIX века считалась частью границы ареалов елей европейской и сибирской [1, 7, 5]. Считается, что по обе стороны Северной Двины широко распространены гибридные популяции указанных видов ели [8, Правдин, 17, 4, 18, 13]. Типы (формы) особей большинство авторов выделяли по форме семенных чешуй визуально. Форма семенных чешуй этих елей со времен Ледебурга (Ledebour), то есть с 1843 г [19, 17] считается основным диагностическим признаком. Целью работы является изучение структуры популяций ели на территории Архангельской области на основе 9-классной градации фенотипов особей, выделяемых по метрическим параметрам популяций.

Материалом для изучения послужили выборки шишек ели в 10 пунктах области. Методика сбора и обработки материалов приводилась автором неоднократно [9, 10, 14, 15]. Структуру популяций ели сибирской изучали при 9-классной градации фенотипов особей (*e*, *eem*, *em*, *emm*, *m*, *mms*, *ms*, *mss*, *s*), соответствующих фенотипам популяций [16]: *P.e.* – *Picea europaea*; *P.eem.* – *P. europaea-europaea-medioxima*; *P.em.* – *P. europaea-medioxima*; *P.emm.* – *P. europaea-medioxima-medioxima*; *P.m.* – *P. medioxima*; *P.mms.* – *P. medioxima-medioxima-sibirica*; *P.ms.* – *P. medioxima-sibirica*; *P.mss.* – *P. medioxima-sibirica-sibirica*; *P.s.* – *P. sibirica* с 10 % градацией комплексного показателя ( $C_n-C_p$ ) формы семенных чешуй (-50, -40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30 % соответственно). Подразделение особей любой популяционной выборки по таким классам представляет собой вариационный ряд, обработка которого в данном случае сводится к определению частоты фенотипов, внутривариационного разнообразия по частоте фенотипов [6]. Показатель разнообразия определяется как квадрат суммы подкоренных значений частот фенотипов:  $M = (\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \dots + \sqrt{p_n})^2$ , где  $M$  – показатель разнообразия,  $p_1, p_2 \dots p_n$  – частоты фенотипов в долях единицы.

Первые три группы особей (*e*, *eem*, *em*) можно считать фенотипами ели европейской, вторые (*emm*, *m*, *mms*) – фенотипами промежуточной формы, третьи (*ms*, *mss*, *s*) – фенотипами ели сибирской. Такое разделение особей соответствует генетическому взаимодействию (интрогрессивной гибридизации) елей европейской и сибирской [3] и географическому распространению соответствующих фенотипов популяций [11, 12, 16].

Ель на изучаемой территории представляют популяции фенотипов *P.m.* (Коноша) и *P.ms.* (остальные выборки) (табл. 1). Как видно, во всех популяциях отсутствуют особи фенотипа *e*, особей фенотипов *eem* и *s* очень мало (1-3 %), несколько больше особей фенотипов *em* и *mss* (в среднем 6-8 %). Заметно больше фенотипов *emm* и *ms* (в среднем 15 и 19 % соответственно). Наибольшую частоту составляют особи фенотипов *m* и *mms* (в среднем 23-24 %). По группам фенотипов особей соотношение их частот выражено весьма четко: особей фенотипа ели европейской в среднем 7.5 (3-16), промежуточного фенотипа – 61.4 (48-76), фенотипа ели сибирской – 31.1 (13-49) %. Показатель разнообразия по выборкам варьирует слабо (6.08-7.04) и в среднем равен 6.55. Он отражает высокий уровень разнообразия анализируемых популяций по частоте фенотипов, поскольку в «чистых» популяциях елей европейской и сибирской (т. е. генетического взаимодействия) он составляет всего 2-3.

Таблица 1

Структура и разнообразие популяций ели в Архангельской области при 9-классной градации фенотипов

Пункт	n	$C_n - C_p$	Частота фенотипов, %							$\Sigma$			M	
			2	3	4	5	6	7	8	9	1-3	4-6		7-9
Коноша	130	-10	3	13	22	26	23	11	2	-	16	71	13	6.08
Ровдино	235	-8	2	5	23	27	26	13	3	1	7	76	17	6.29
Обозерский	220	-6	1	8	20	28	26	12	4	1	9	74	17	6.33
Безезник	135	-5	1	7	13	35	16	21	5	2	8	64	28	6.45
Рочегда	220	-5	2	5	11	26	18	19	15	4	7	55	38	7.04
В.Тойма	350	-4	1	8	17	23	23	16	9	3	9	63	28	6.90
Ядриха	107	-3	1	9	13	19	29	21	7	1	10	61	29	6.54
Горка	200	1	1	2	11	14	31	25	13	3	3	51	46	6.44
У-Пинега	200	1	1	2	8	24	19	29	10	7	3	51	46	6.60
Карпогоры	250	2	1	2	11	17	20	25	16	8	3	48	49	6.84

Примечание. Здесь и в табл.2: n – число особей в выборке;  $C_n - C_p$  – разность коэффициентов сужения ( $C_n$ ) и вытянутости ( $C_p$ ) верхней части семенных чешуй; фенотипы особей: 1 – e, 2 – eem, 3 – em, 4 – eem, 5 – m, 6 – mms, 7 – ms, 8 – mss, 9 – s;  $\Sigma$  – знак суммы частоты фенотипов; M – показатель внутривидового разнообразия по частоте фенотипов.

Частота фенотипов особей в популяциях заметно связана со средним значением комплексного показателя ( $C_n - C_p$ ) формы семенных чешуй, что характеризуется соответствующими показателями корреляции (табл. 2).

Таблица 2

Корреляция средних показателей формы семенных чешуй и частоты разных групп фенотипов особей в популяциях ели Архангельской области

Коррелирующие признаки	$\eta \pm S_\eta$	t	$R \pm S_r$	t	$K_k$
$C_n - C_p$ и $\Sigma 1-3$	0.975 $\pm$ 0.0778	12.54	-0.842 $\pm$ 0.1907	4.41	0.24
$C_n - C_p$ и $\Sigma 4-6$	0.968 $\pm$ 0.0883	10.97	-0.890 $\pm$ 0.1615	5.51	0.15
$C_n - C_p$ и $\Sigma 7-9$	0.963 $\pm$ 0.0952	10.11	+0.936 $\pm$ 0.1244	7.52	0.05
$C_n - C_p$ и M	0.776 $\pm$ 0.2229	3.48	+0.495 $\pm$ 0.3073	1.61	0.36

Примечание.  $\eta$  – корреляционное отношение и его ошибка, R – коэффициент корреляции и его ошибка, – показатель достоверности,  $K_k$  – показатель криволинейности, при  $K_{k0.05} = 0.1$ ,  $R_{0.05} = 0.632$ .

Корреляционное отношение показателя формы семенных чешуй с частотой фенотипов (по группам) очень высокое и во всех случаях более 0.9. Коэффициент корреляции, естественно, несколько ниже, но достаточно высок (0.84-0.94) и достоверен. Связь показателя с показателем разнообразия слабая при данном числе выборок.

Вся совокупность выборок заметно разделяется на 3 группы практически по всем анализируемым показателям. Особенно заметно это разделение по частоте промежуточных фенотипов и фенотипов ели сибирской. Первую группу представляют популяции, в которых частота промежуточных фенотипов составляет около 70 (71-76), вторую – около 60 (61-64) и третью группу – 50 (48-51) %. Частота фенотипов ели сибирской в этих группах – 15 (13-17), 30 (28-38) и 46-49 % соответственно. Примерно в таком же соотношении изменяются показатели частоты фенотипов ели европейской и формы семенных чешуй ( $C_n - C_p$ ). По показателю разнообразия различий практически нет. Популяции первой группы располагаются в западной части области, второй – в приречных районах Северной Двины, третьей – в восточной части региона.

Таким образом, на территории Архангельской области наибольшее распространение имеют особи промежуточных фенотипов и фенотипов ели сибирской и мало фенотипов ели европейской. В целом же на территории области распространены популяции ели промежуточной формы елей европейской и сибирской, но ближе к последней.

## Список литературы

1. Арнольд Ф.К. О сибирской ели // А. Россмеслер. Лес. СПб. 1866. С. 353-354.
2. Атлас лесов СССР. М.: ГУГК, 1973. 222 с.
3. Бобров Е. Г. Интрогрессивная гибридизация в роде *Picea* A. Dietr. // Труды ИРиЖ УНЦ АН СССР, 1974. Вып. 90. С. 60-66.
4. Бобров Е.Г. Лесообразующие хвойные СССР. Л.: Наука, 1978. 188 с.
5. Вольф Э. Хвойные деревья и кустарники Европейской и Азиатской части СССР. Л.: Ленингр. лесн. ин-т, 1925. 173 с.
6. Животовский Л.А. Показатели популяционной изменчивости по полиморфным признакам // Фенетика популяций. М.: Наука, 1982. С.38-45.
7. Кеппен Ф. Географическое распространение хвойных деревьев в Европейской России и на Кавказе. СПб, 1885. 634 с.
8. Корчагин А.А. Современная динамика лесной растительности на Европейском Севере // Лесоведение. 1968. – № 3. С. 30-35.
9. Попов П.П. Изменчивость формы семенных чешуй и структура уральских популяций ели сибирской // Лесоведение. 1980. № 6. С. 19-25.
10. Попов П.П. Географическая изменчивость формы семенных чешуй ели в Восточной Европе и Западной Сибири. Лесоведение. 1999. № 1. С. 68-73.
11. Попов П.П. Формовая структура и таксономическая принадлежность промежуточных популяций ели европейской и сибирской // Лесоведение. 2007. № 4. С. 59-67.
12. Попов П. П. Популяционно-расовая дифференциация *Picea abies* и *P. obovata* (PINACEAE) // Бот. журн. 2009. Т. 94. № 9. С. 1317–1334.
13. Попов П. П. Фенотипическое разнообразие семенных чешуй северодвинских популяций ели и их таксономическая интерпретация // Бот. журн. 2010. Т. 95. № 5. С. 647–656.
14. Попов П.П. Формовая структура и географическая дифференциация популяций ели на северо-западе России // Экология. 2010. № 5. С. 336–343.
15. Попов П.П. «Эталонные» популяций для дискриминантного анализа в сплошном ареале ели европейской и сибирской. Экология. 2012. № 1. С. 16-21.
16. Попов П.П. Фенотипическая структура популяций *Picea abies* и *P. obovata* (Pinaceae) на востоке Европы // Ботан. журн. 2013. Т. 98. № 11. С. 1384- 1402.
17. Правдин Л.Ф. Ель европейская и ель сибирская в СССР. М.: Наука, 1975. 176 с.
18. Чертовской В.Г. Еловые леса Европейской части СССР. М.: Лесн. пром., 1978. 176 с.
19. Teplouchoff Th. Ein Beitrag zur Kenntniss der sibirischen Fichte – *Picea Obovata* Ledeb // Bull. Imp. Natural. De Moscou. 1868. Bd. 41. Ht 3. S. 244-252.

### СЕКЦИЯ №65.

#### ВИРУСОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.02)

### СЕКЦИЯ №66.

#### МИКРОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.03)

### СЕКЦИЯ №67.

#### ЗООЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.04)

### СЕКЦИЯ №68.

#### ЭНТОМОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.05)

### СЕКЦИЯ №69.

#### ИХТИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.06)

**СЕКЦИЯ №70.**

**ГЕНЕТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.07)**

**СЕКЦИЯ №71.**

**ЭКОЛОГИЯ (ПО ОТРАСЛЯМ) (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.08)**

**СЕКЦИЯ №72.**

**БИОГЕОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.09)**

**СЕКЦИЯ №73.**

**ГИДРОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.10)**

**СЕКЦИЯ №74.**

**ПАРАЗИТОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.11)**

**СЕКЦИЯ №75.**

**МИКОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.12)**

**СЕКЦИЯ №76.**

**ПОЧВОВЕДЕНИЕ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.13)**

**СЕКЦИЯ №77.**

**БИОЛОГИЧЕСКИЕ РЕСУРСЫ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.14)**

**ФИЗИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.00)**

**СЕКЦИЯ №78.**

**ФИЗИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.01)**

**СЕКЦИЯ №79.**

**АНТРОПОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.02)**

**СЕКЦИЯ №80.**

**ИММУНОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.03)**

**СЕКЦИЯ №81.**

**КЛЕТОЧНАЯ БИОЛОГИЯ, ЦИТОЛОГИЯ, ГИСТОЛОГИЯ  
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.04)**

**СЕКЦИЯ №82.**

**БИОЛОГИЯ РАЗВИТИЯ, ЭМБРИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.05)**

**СЕКЦИЯ №83.**

**НЕЙРОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.06)**

## ГЕОГРАФИЯ

### СЕКЦИЯ №84.

#### **ФИЗИЧЕСКАЯ ГЕОГРАФИЯ И БИОГЕОГРАФИЯ, ГЕОГРАФИЯ ПОЧВ И ГЕОХИМИЯ ЛАНДШАФТОВ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 25.00.23)**

##### ОСОБЕННОСТИ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВОЗМОЖНЫХ КЛИМАТИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ НА СТОК РЕК, РАСПОЛОЖЕННЫХ В РАЗЛИЧНЫХ ПРИРОДНЫХ УСЛОВИЯХ

Гусев Е.М., Насонова О.Н., Ковалев Е.Э.

ФГБУ науки Институт водных проблем Российской академии наук, г. Москва

*\*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 16-17-10039).*

В 2013 году был организован международный проект Inter-Sectoral Impact Model Intercomparison Project (ISI-MIP) [9], одной из задач которого стало объединение усилий сообщества модельеров гидрологических процессов с целью обобщения получаемых прогностических оценок воздействия глобального изменения климата на водные ресурсы в разных пространственных масштабах, в том числе и в масштабе речного бассейна. Настоящая работа выполнялась в рамках ISI-MIP2; ее целью явилось исследование возможного изменения речного стока до 2100 г. для 11 крупных речных бассейнов, находящихся в широком спектре природных условий. В настоящей работе в качестве основного расчетного инструмента использовалась ранее разработанная авторами модель взаимодействия подстилающей поверхности суши с атмосферой SWAP (Soil Water – Atmosphere – Plants) [1]. Кроме того, авторы попытались обобщить полученные результаты в терминах так называемой климатической «эластичности» стока.

SWAP представляет собой физико-математическую модель с распределенными параметрами, описывающую процессы тепло- и влагообмена в системе почва – растительность/снежный покров – атмосфера. Для крупномасштабного речного бассейна проводится разбиение его поверхности на ряд расчетных ячеек, соединенных речной сетью. Выходными переменными модели SWAP являются несколько десятков характеристик теплового и водного режимов рассматриваемого речного бассейна. Но в данной работе в связи с поставленной задачей и ограниченностью объема статьи будет рассмотрена только одна наиболее интересная для гидрологов характеристика – речной сток.

Объектами данного исследования послужили 11 крупных речных бассейнов, расположенных на разных континентах Земного шара в различных природных условиях: Рейн и Тагус в Европе; Ганг, Лена, Верхняя Хуанхэ и Верхняя Янцзы в Азии; Нигер в Африке; Маккензи и Верхняя Миссисипи в Северной Америке, Верхняя Амазонка в Южной Америке и Дарлинг в Австралии (рис. 1). Использование для анализа только верховий таких рек как Хуанхэ, Янцзы, Миссисипи и Амазонка обусловлено тем, что именно эти части речных бассейнов в наименьшей степени подвержены антропогенным воздействиям, оказывающим существенное влияние на сток рек, в связи с чем дополнительной информации, связанной с регулированием стока, не требуется. Основные характеристики выбранных речных бассейнов приведены в таблице 1 [6, 7]. Отметим, что эти бассейны представляют собой выборку объектов, более или менее репрезентативно отражающую специфику природных условий значительной части суши земного шара.

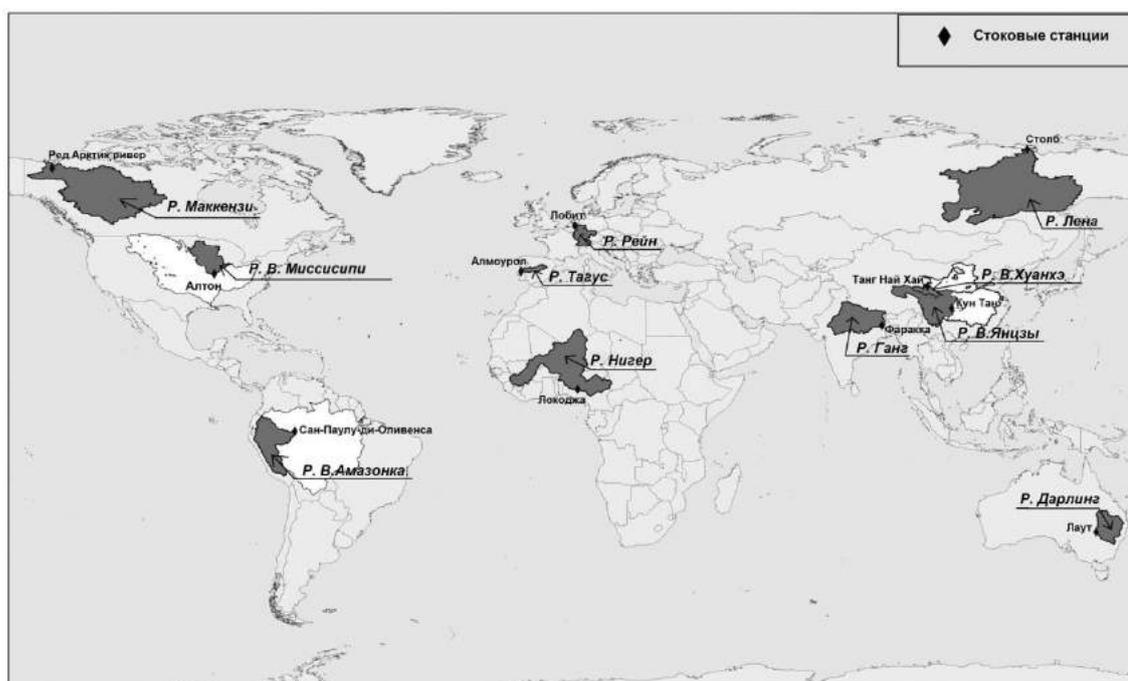


Рис.1. Местоположение рассмотренных в работе речных бассейнов.

Таблица 1. Рассмотренные в работе речные бассейны, их площади, число расчетных ячеек, стоковые станции с их координатами, а также усредненные по площади климатические характеристики бассейнов (для периода с 1971 по 2000 гг.): приземная температура воздуха  $T$ , осадки  $P$ , речной сток  $R$ , коэффициент стока  $R/P$  [6, 7].

Река	Стоковая станция	Широта, град	Долгота, град.	Площадь бассейна (км <sup>2</sup> )	Число расчетных ячеек	$T$ , °С	$P$ , мм/год	$R$ , мм/год	$R/P$
Лена	Столб	72.37	126.80	2 460 000	1668	-10.2	384	201	0.52
В. Амазонка	Сан-Паулу-ди-Оливенса	-3.45	-68.75	990 781	330	21.7	2122	1459	0.69
Маккензи	Арктик Ред ривер	67.46	-133.74	1 660 000	1128	-4.3	435	171	0.39
В. Янцзы	Кун Тан	29.61	106.60	804 859	325	6.8	768	389	0.51
Ганг	Фаракка	25.00	87.92	835 000	340	21.1	1173	471	0.4
В. Хуанхэ	Танг Най Хай	35.50	100.15	121 000	51	-2	506	169	0.33
Нигер	Локоджа	7.80	6.77	2 074 171	678	27.7	625	77	0.12
Рейн	Лобит	51.84	6.11	160 800	83	8.7	1038	457	0.44
В. Миссисипи	Алтон	38.89	-90.18	444 185	198	7.3	967	257	0.27
Тагус	Алмоурол	39.47	-8.37	67 490	35	14	671	152	0.23
Дарлинг	Лаут	-30.53	145.11	489 300	180	19.2	590	8	0.01

Указанные бассейны были схематизированы в виде совокупности ячеек регулярной сетки с пространственным разрешением по широте и долготе  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ , соединенных речной сетью. На рис. 2 приведены примеры подобной схематизации.

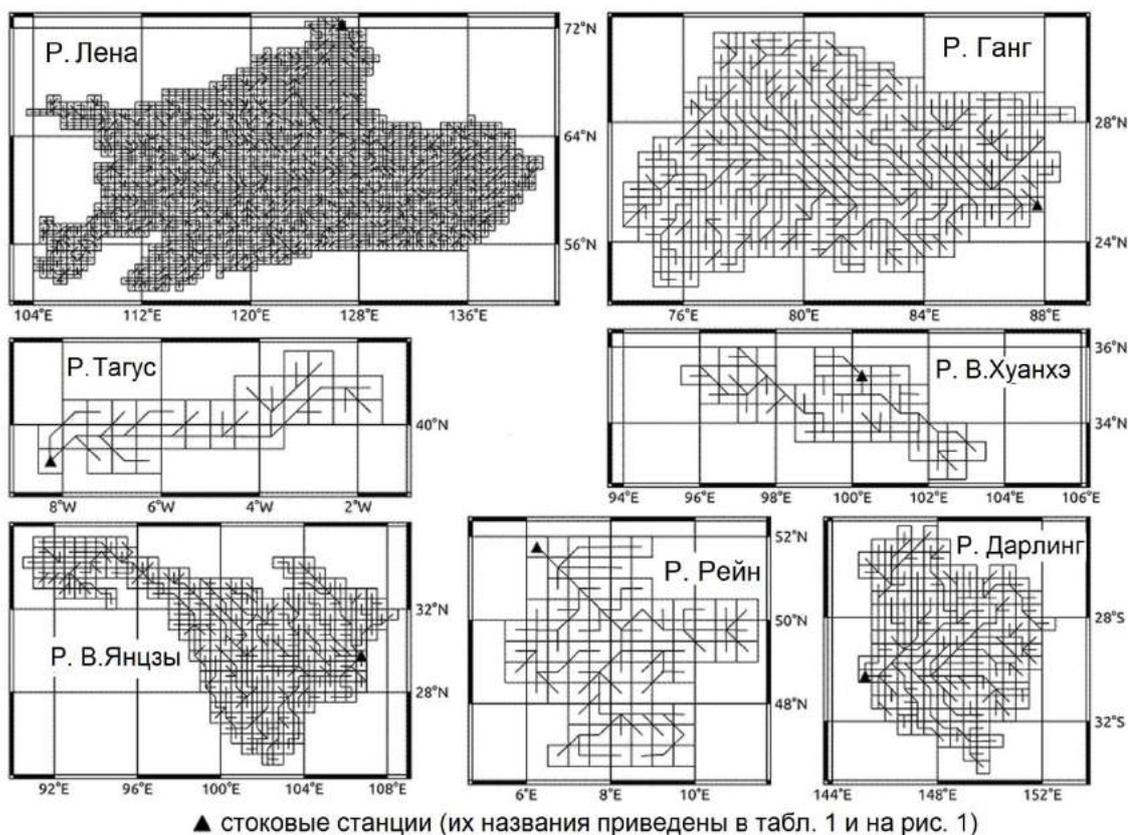


Рис.2. Примеры схематизации ряда выбранных речных бассейнов.

Информационное обеспечение модели SWAP включает в себя (1) необходимую для задания верхних граничных условий приземную метеорологическую информацию, (2) параметры подстилающей поверхности, (3) гидрологические характеристики для калибровки и проверки модели.

Для калибровки и последующей проверки модели суточные значения метеорологических элементов за период 1969-2001 гг. были взяты из глобальной базы данных WATCH [10], созданной на основе гибридизации данных реанализа ERA-40 с месячными значениями наземных измерений из баз данных GPCC (Global Precipitation Climatology Center) и университета Восточной Англии CRU (Climatic Research Unit) (включающих в себя температуру воздуха, количество дней с осадками, облачность и осадки).

Для прогностических расчетов использовались суточные метеорологические данные за период с 2006 по 2099 гг., полученные по пяти моделям общей циркуляции атмосферы и океана (МОЦАО): HadGEM2-ES, IPSL-CM5A-LR, MIROC-ESM-CHEM, GFDL-ESM2M и NorESM1-M [7] на основе четырех сценариев изменения климата семейства RCP (Representative Concentration Pathways) [8]: RCP2.6, RCP4.5, RCP6.0 и RCP8.5, использованных при подготовке 5-го оценочного доклада IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change). Числа в аббревиатуре сценариев соответствуют приращению значений приходящей радиации (в  $Вт/м^2$ ) в 2100 г., вызванного увеличением эмиссии парниковых газов в атмосферу по сравнению с доиндустриальным периодом. Большие значения чисел соответствуют более агрессивным антропогенным сценариям, обусловленным повышенной эмиссией парниковых газов в атмосферу и слабыми мерами по ограничению их выбросов. Кроме того, в работе использовались рассчитанные по МОЦАО значения метеорологических элементов для исторического периода (1962–2005 гг.).

Для повышения качества последующих гидрологических расчетов в рамках ISI-MIP2 [8] была проведена постпроцессинговая коррекция значений метеорологических элементов, полученных по пяти вышеперечисленным МОЦАО, с целью уменьшения возможных систематических ошибок расчета для исторического периода. Коррекция проводилась по соответствующим данным из WATCH для исторического (базового) периода P0 (1962–2005 гг.), на основе которых оптимизировались наиболее важные параметры бассейнов.

Параметры подстилающей поверхности для каждой расчетной ячейки бассейнов были получены с использованием экосистемной базы данных ECOCLIMAP [2] по методике, изложенной в [6].

Данные по речному стоку для калибровки и верификации модели были предоставлены организаторами ISI-MIP2.

С целью улучшения качества гидрологических расчетов была осуществлена автоматизированная калибровка наиболее важных модельных параметров на основе алгоритма поиска глобального экстремума целевой функции SCE-UA [3] с наложением дополнительного условия, что систематическая ошибка расчета стока не должна превышать 5%. В качестве целевой функции использовалось среднеквадратическое отклонение рассчитанных месячных значений стока от измеренных. Калибровка осуществлялась по возможности для 8-летнего периода по месячным значениям измеренного стока [6].

Проверка адекватности полученных оптимальных значений параметров осуществлялась для периода с 1970 по 2001 гг. и показала вполне удовлетворительное соответствие измеренных и рассчитанных климатических значений (осредненных за указанный период) речного стока (рис. 3).

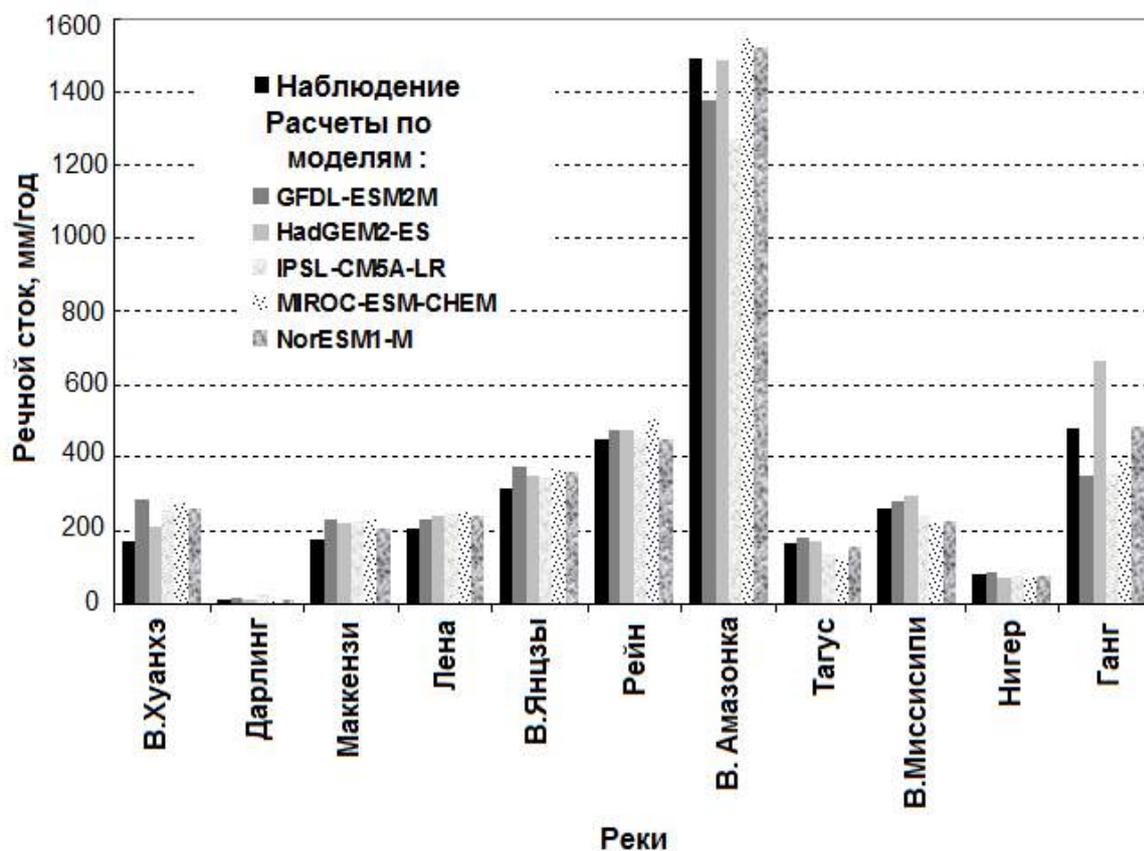


Рис. 3. Сопоставление измеренных и рассчитанных климатических значений годового стока выбранных рек для исторического периода.

Полученные значения оптимальных параметров использовались для расчета стока вышеуказанных рек по модели SWAP с использованием рассчитанных по пяти МОЦАО суточных значений метеорологических элементов для двух основных периодов: исторического P0 (1962–2005 гг.) и прогностического (2006–2099), который, в свою очередь, при анализе результатов был разделен на три части: P1 (2006–2035 гг.), P2 (2036–2065 гг.) и P3 (2066–2099 гг.). Для прогностического периода речной сток рассчитывался для четырех вышеуказанных климатических сценариев семейства RCP.

Примеры полученных результатов по оценке изменения стока в XXI в. представлена на рис. 4, где показана динамика годовых значений речного стока (осредненных по результатам моделирования с использованием метеорологических данных, рассчитанных по ансамблю из пяти МОЦАО) для 4-х из 11 речных бассейнов и четырех климатических сценариев. При этом для периода P0 приведены средние за период значения стока, а для последующих (прогностических) лет – значения, осредненные по времени методом скользящего среднего с периодом осреднения в 30 лет, т.е. результаты на рис. 4 представляют

динамику климатического стока. Кроме того, здесь же показана неопределенность оценки стока, обусловленная разбросом результатов моделирования различных МОЦАО и рассчитанная как среднеквадратическая ошибка ансамблевого среднего.

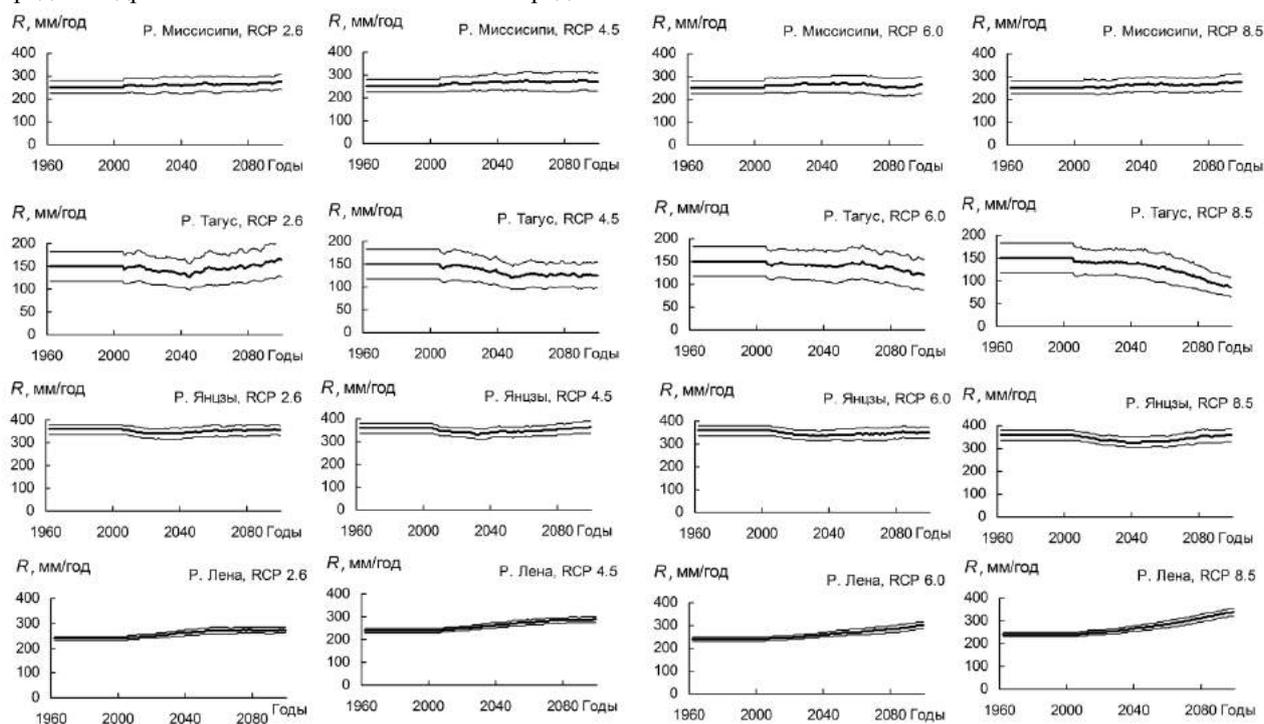


Рис. 4. Примеры динамики климатических изменений стока в XXI в. для части выбранных в работе рек. Жирной линией показаны результаты мультимодельных климатических изменений, тонкими линиями – среднеквадратическая ошибка ансамблевого среднего.

Полученные в работе результаты подтвердили очевидный вывод, что более агрессивные сценарии приводят к большим изменениям речного стока с выбранных бассейнов, причем как в положительную, так и в отрицательную сторону (для разных бассейнов). Что касается относительной ошибки климатического стока (равной абсолютному значению ошибки, деленному на среднее значение стока), то указанная ошибка оказывается наибольшей для рек Дарлинг и Тагус. Следует отметить, что, согласно [6], бассейны этих рек характеризуются и наибольшей естественной неопределенностью стока, обусловленной погодным шумом. Для северных рек – Лены и Маккензи, наоборот, указанная ошибка имеет наименьшее значение, что соответствует наименьшим значениям естественной неопределенности стока этих рек [6]. По-видимому, для бассейнов с наибольшей амплитудой погодного шума наиболее велик и разброс динамики метеорологических элементов, полученных на основе расчетов с использованием различных МОЦАО, в свою очередь, приводящий и к большему разбросу рассчитанных на их основе значений речного стока.

Что касается значений изменения стока  $\Delta R$ , то они, естественно, различны (как по величине, так и по знаку) для бассейнов, находящихся в различных регионах планеты из-за различий в природных условиях бассейнов, прежде всего, климатических. Мы попробовали обобщить полученные результаты на основе понятия климатической эластичности стока. Понятие климатической эластичности, введенное Фу [4], используется для определения реакции какой-либо характеристики, например, стока на изменения климата. Например, эластичность речного стока к изменению осадков, равная 2.2, означает, что изменение годового количества осадков на 10% приведет к изменению годового стока на  $10\% \times 2.2 = 22\%$ . Для оценки значений эластичности стока к изменению температуры ( $\varepsilon_T$ ) и осадков ( $\varepsilon_P$ ) для каждого рассмотренного в работе речного бассейна использовалось приведенное в [5] выражение:

$$\Delta R / R_0 = \varepsilon_T \Delta T / T_0 + \varepsilon_P \Delta P / P_0 \quad , \quad (1)$$

где  $R_0$ ,  $T_0$  и  $P_0$  – соответственно климатические значения годового речного стока с бассейна, приземной среднегодовой температуры воздуха и годовых осадков для исторического периода, а  $\Delta R$ ,  $\Delta T$  и  $\Delta P$  – изменения указанных характеристик (здесь осадки и сток в мм/год, температура воздуха в К).

На основе полученных значений климатических эластичностей для выбранных бассейнов было проведено их картирование с помощью метода кригинга в фазовых координатах значений  $T_0$  и  $P_0$ . Рисунок

5 иллюстрирует распределение в фазовом пространстве переменных  $T0$  и  $P0$  климатических эластичностей речного стока к изменению температуры ( $\varepsilon_T$ ) и осадков ( $\varepsilon_P$ ). При этом видно, что значения  $\varepsilon_T$  имеют отрицательные значения, поскольку прирост температуры увеличивает испарение, приводя к уменьшению стока, а значения  $\varepsilon_P$  – положительны, в силу того, что приращение осадков увеличивает сток.

Приведенные на рис. 5 значения климатических эластичностей дают возможность при наличии данных о прогнозах изменения среднегодовой температуры воздуха и годовых сумм осадков для того или иного речного бассейна прогнозировать в первом приближении изменение климатического годового речного стока.

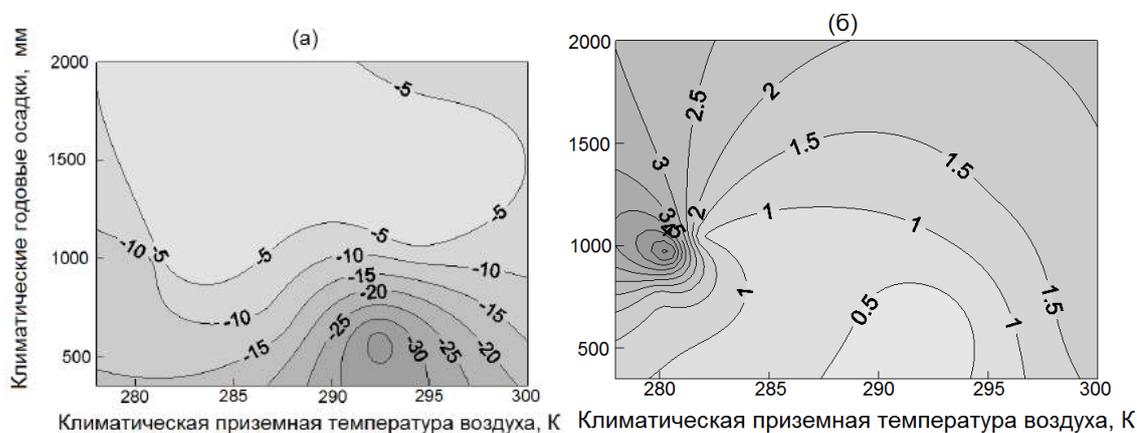


Рис. 5. Климатические эластичности речного стока по отношению к изменениям осредненных по бассейнам среднегодовых приземных температур воздуха (а) и годовых сумм осадков (б) (на рисунке эластичности показаны изолиниями).

#### Список литературы

1. Гусев Е.М., Насонова О.Н. Моделирование тепло- и влагообмена поверхности суши с атмосферой. М.: Наука, 2010. 328 с.
2. Champeaux J.L., Masson V., Chauvin F. ECOCLIMAP: a global database of land surface parameters at 1 km resolution. Meteorol. Appl. 2005. № 12. P. 29–32. doi:10.1017/S1350482705001519.
3. Duan Q., Sorooshian S., Gupta V.K. Effective and efficient global optimization for conceptual rainfall runoff models. Water Resour. Res. 1992. V. 28. № 4. P. 1015–1031.
4. Fu B. On the calculation of the evaporation from land surface. Sci. Atmos. Sin. 1981, V. 5, P. 23–31.
5. Grijsen J., Patel H. Understanding the impact of climate change on hydropower: the case of Cameroon – climate risk assessment for hydropower generation in Cameroon. World Bank Group. 2014. Report No. 87913. AFTEG. Washington DC. 151 p.
6. Gusev Y.M., Nasonova O.N., Kovalev E.E., Aizel G.V. Modelling river runoff and estimating its weather-related uncertainty for 11 large-scale rivers located in different regions of the globe. Hydrology Research. 2017. DOI: 10.2166/nh.2017.015 (In press). [Available at: <http://hr.iwaponline.com/content/early/recent>. Accepted in revised form 2 April 2017].
7. Krysanova V., Hattermann F.F. Intercomparison of climate change impacts in 12 large river basins: overview of methods and summary of results. Climatic Change. 2017. V. 141. P. 363–379. DOI 10.1007/s10584-017-1919-y.
8. Moss R., Babiker M., Brinkman S., Calvo E., Carter T., Edmonds J., Elgizouli I., Emor S.i, Erda L., Hibbard K., Jones R., Kainuma M., Kelleher J., Lamarque J.F., Manning M., Matthews B., Meeh J.I, Meyer L., Mitchell J., Nakicenovic N., O'Neill B., Pichs R., Riahi K., Rose S., Runci P., Stouffer R., van Vuuren D., Weyant J., Wilbanks T., van Ypersele J.P., Zurek M. Towards New Scenarios for Analysis of Emissions, Climate Change, Impacts, and Response Strategies. 2008. Intergovernmental Panel on Climate Change. Geneva. 132 pp.
9. Warszawski L., Frieler K, Huber V, Piontek F, Serdeczny O, Schewe J The inter-sectoral impact model intercomparison project (ISI-MIP): project framework. PNAS. 2014. V. 111, № 9. P. 3228–3232. doi:10.1073/pnas.1312330110.
10. Weedon G.P., Gomes S., Viterbo P., Shuttleworth W.J., Blyth E., Österle H., Adam J.C., Bellouin O., Best M. Creation of the WATCH Forcing Data and its use to assess global and regional reference crop

evaporation over land during the twentieth century. J. Hydrometeorology. 2011. V. 12. P. 823 – 848. doi: 10.1175/2011JHM1369.1.

**СЕКЦИЯ №85.**

**ЭКОНОМИЧЕСКАЯ, СОЦИАЛЬНАЯ, ПОЛИТИЧЕСКАЯ  
И РЕКРЕАЦИОННАЯ ГЕОГРАФИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 25.00.24)**

**СЕКЦИЯ №86.**

**ГЕОМОРФОЛОГИЯ И ЭВОЛЮЦИОННАЯ ГЕОГРАФИЯ  
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 25.00.25)**

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

**СЕКЦИЯ №87.**

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ  
ГЕОЛОГИЯ**

**СЕКЦИЯ №88.**

**РАЗВИТИЕ ГЕОЛОГИИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ**

## ПЛАН КОНФЕРЕНЦИЙ НА 2017 ГОД

### Январь 2017г.

IV Международная научно-практическая конференция «**Актуальные вопросы естественных и математических наук в современных условиях развития страны**», г. Санкт-Петербург

Прием статей для публикации: до 1 января 2017г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 февраля 2017г.

### Февраль 2017г.

IV Международная научно-практическая конференция «**Актуальные проблемы естественных и математических наук в России и за рубежом**», г. Новосибирск

Прием статей для публикации: до 1 февраля 2017г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 марта 2017г.

### Март 2017г.

IV Международная научно-практическая конференция «**Актуальные вопросы современных математических и естественных наук**», г. Екатеринбург

Прием статей для публикации: до 1 марта 2017г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 апреля 2017г.

### Апрель 2017г.

IV Международная научно-практическая конференция «**Актуальные проблемы и достижения в естественных и математических науках**», г. Самара

Прием статей для публикации: до 1 апреля 2017г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 мая 2017г.

### Май 2017г.

IV Международная научно-практическая конференция «**Актуальные вопросы и перспективы развития математических и естественных наук**», г. Омск

Прием статей для публикации: до 1 мая 2017г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 июня 2017г.

### Июнь 2017г.

IV Международная научно-практическая конференция «**Современные проблемы математических и естественных наук в мире**», г. Казань

Прием статей для публикации: до 1 июня 2017г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 июля 2017г.

#### **Июль 2017г.**

IV Международная научно-практическая конференция **«О вопросах и проблемах современных математических и естественных наук»**, г. Челябинск

Прием статей для публикации: до 1 июля 2017г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 августа 2017г.

#### **Август 2017г.**

IV Международная научно-практическая конференция **«Информационные технологии естественных и математических наук»**, г. Ростов-на-Дону

Прием статей для публикации: до 1 августа 2017г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 сентября 2017г.

#### **Сентябрь 2017г.**

IV Международная научно-практическая конференция **«Естественные и математические науки в современном мире»**, г. Уфа

Прием статей для публикации: до 1 сентября 2017г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 октября 2017г.

#### **Октябрь 2017г.**

IV Международная научно-практическая конференция **«Основные проблемы естественных и математических наук»**, г. Волгоград

Прием статей для публикации: до 1 октября 2017г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 ноября 2017г.

#### **Ноябрь 2017г.**

IV Международная научно-практическая конференция **«Естественные и математические науки: вопросы и тенденции развития»**, г. Красноярск

Прием статей для публикации: до 1 ноября 2017г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 декабря 2017г.

#### **Декабрь 2017г.**

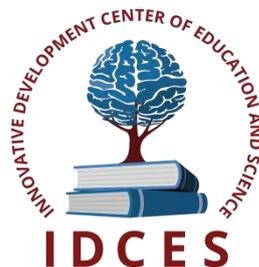
IV Международная научно-практическая конференция **«Перспективы развития современных математических и естественных наук»**, г. Воронеж

Прием статей для публикации: до 1 декабря 2017г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 января 2018г.

С более подробной информацией о международных научно-практических конференциях можно ознакомиться на официальном сайте Инновационного центра развития образования и науки [www.izron.ru](http://www.izron.ru) (раздел «Естественные и математические науки»).

**ИННОВАЦИОННЫЙ ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ**  
**INNOVATIVE DEVELOPMENT CENTER OF EDUCATION AND SCIENCE**



**Информационные технологии естественных  
и математических наук**

**Выпуск IV**

**Сборник научных трудов по итогам  
международной научно-практической конференции  
(11 августа 2017г.)**

**г. Ростов-на-Дону**

**2017 г.**

Печатается в авторской редакции  
Компьютерная верстка авторская

Подписано в печать 10.08.2017.  
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 4,5.  
Тираж 250 экз. Заказ № 087.

Отпечатано по заказу ИЦРОН в ООО «Ареал»  
603000, г. Нижний Новгород, ул. Студеная, д. 58.